Exercícios - Espaço Linha e Espaço Coluna

Prof. Maria Inez Cardoso Gonçalves

1) Para cada uma das matrizes a seguir encontre uma base para $col(A)$, $row(A)$ e $N(A)$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2) Para cada uma das escolhas de A e b a seguir, determine se $b \in col(A)$ e diga se $Ax = b$ é ou não compatível.

(a) A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) Quantas soluções o sistema $Ax = b$ terá se $b \in col(A)$ e se os vetores coluna de A forem l.i.?

4) Seja $A_{m\times n}, m > n$. Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e suponha que $N(A) = \{0\}$

(a) O que você pode concluir sobre as colunas de A? São l.i.? Geram $\mathbb{R}^m$?

(b) Quantas soluções $Ax = b$ terá se $b \notin col(A)$? E se $b \in col(A)$?

5) Seja $A_{m\times n}$. Se $B_{m\times m}$ é uma matriz inversível, mostre que BA e A tem o mesmo núcleo e, portanto o mesmo posto.

6) Suponha que A e B são matrizes $m \times n$ com a propriedade de que $Ax = Bx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) $N(A-B) = \mathbb{R}^n$

(b) $A-B$ tem que ter posto nulo e, portanto $A = B$.

7) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que $AB = 0$ se e somente se o espaço coluna de B é um subespaço de $N(A)$.

8) Sejam x e y vetores não nulos em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente e seja $A = xy^T$.

(a) Mostre que $\{x\}$ é uma base para $col(A)$ e $\{y^T\}$ é uma base para $row(A)$.

(b) $nul(A) =?$

9) Dizemos que uma matriz $A_{m\times n}$ tem uma inversa à direita se existir uma matriz $C_{m\times n}$ tal que $AC = I_m$. Dizemos que A tem uma inversa à esquerda se existir uma matriz $D_{n\times m}$ tal que $DA = I_n$.

(a) Mostre que, se A tem uma inversa à direita então os vetores coluna de A geram $\mathbb{R}^m$.

(b) É possível para uma matriz $m \times n$ ter uma inversa à direita se $n < m$? e se $n \geq m$? Explique.

10) Encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado plos vetores.

(a) $(1, 1, -4, -3)^T$, $(2, 0, 2, -2)^T$, $(2, -1, 3, 2)^T$

(b) $(1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(-2, 0, 2, 2)^T$, $(0, -3, 0, 3)^T$

11) Encontre um subconjunto dos vetores dados que forma uma base para o subespaço gerado por eles:

(a) $v_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $v_2 = (-3, 3, 7, 1)^T$, $v_3 = (-1, 3, 9, 3)^T$, $v_4 = (-5, 3, 5, -1)^T$

(b) $v_1 = (1, -2, 0, 3)^T$, $v_2 = (2, -4, 0, 6)^T$, $v_3 = (-1, 1, 2, 0)^T$, $v_4 = (0, -1, 2, 3)^T$

12) Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 2, -2, 1)^T$ e $(1, 0, -2, 2)^T$.

Respostas

1) a) Base para $row(A)$: $\{(1,0,2),(0,1,0)\}$, base para $col(A):\ \left\{(1,2,4)^T,(3,1,7)^T\right\}$, base para $N(A)$: $\left\{(-2,0,1)^T\right\}$.
b) Base para $row(A)$: $\left\{(1,0,0,\frac{-10}{7}),(0,1,0,\frac{-2}{7}),(0,0,1,0)\right\}$, base para $col(A)$: $\{(-3,1,-3)^T,\ (1,2,8)^T,\ (3,-1,4)^T\}$, base para $N(A)$: $\{(\frac{10}{7},\frac{2}{7},0,1)^T\}$

2) (a) insconsistente
(b) consistente

3) Se $b \in col(A)$, então o sistema é consistente e se as colunas de A l. i., então temos no máximo uma solução para o sistema!
$\therefore\ \exists$! solução para os sistema

4) (a) As colunas de A são l.i., porém elas não geram $\mathbb{R}^m$, pois $n < m$.
(b) Se $b \notin col(A) \Rightarrow$ sistema inconsistente. Se $b \in col(A) \Rightarrow \exists$ solução, usando (a) a solução é única.

5) Se $x \in N(A)$ então $BAx = B.0 = 0 \Rightarrow x \in N(BA)$. Se $x \in N(BA)$, então $0 = (BA)x = B(Ax) \Rightarrow Ax \in N(B)$, mas $N(B) = \{0\}$, pois B é invisível, logo $Ax = 0$ e $x \in N(A)$. Portanto, $N(A) = N(BA)$. Do teorema do posto temos que $posto(A) + nul(A) = n$, isto é:

$$\begin{aligned} posto(A) &= n - nul(A) \\ &= n - nul(BA) \\ &= posto(BA) \end{aligned}$$

6) (a) Se $Ax = Bx,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, então $(A-B)x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \therefore N(A-B) = \mathbb{R}^n$.

(b) Pelo ítem (a) temos que $nul(A-B) = n$, assim usando o teorema do posto, $posto(A-B) + nul(A-B) = n \Rightarrow posto(A-B) = 0$. Assim, $A-B = 0 \Rightarrow A = B$.

7) $col(B)$ é um subespaço de $N(A)$ se e somente se, $Ab_j = 0, j = 1,...,n$. Porém, a j-ésima coluna de AB é $(AB)e_j = Ab_j,\ j = 1,...,n$. Assim, $col(B)$ é um subespaço de $N(A)$ se e somente se, todos os vetores coluna de AB são 0, ou equivalentemente $AB = 0$.

8)(a) Sejam $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Como $A = xy^T$, temos que $A = xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y^T \\ x_2y^T \\ \vdots \\ x_my^T \end{pmatrix}$, as linhas de A são todas múltiplos de y^T. Assim $\left\{y^T\right\}$ é uma base para $row(A)$.

Por outro lado, como $A = xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix} =$ $(y_1x, y_2x, ..., y_nx)$ segue que as colunas de A são todas múltiplos de x. Assim, $\{x\}$ é uma base para $col(A)$.

(b) $nul(A) = n - 1$ (posto$(A) = 1$).

9)(a) Seja C a inversa à direita de A e seja $b \in \mathbb{R}^m$. Fazendo $x = Cb$, então $Ax = A(Cb) = (AC)b = I_mb = b$, ou seja, $Ax = b$ é consistente para cada $b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$ colunas de A geram $\mathbb{R}^m$.

(b) Nenhum conjunto com menos de m vetores pode gerar $\mathbb{R}^m$. Assim, se $n < m$, as colunas de A não geram $\mathbb{R}^m$ e consequentemente A não pode ter uma inversa à direita. Se $n \geq m$ é possível.

10)(a) $(1, 1, -4, 3)^T$, $(0, 1, -5, -2)^T$, $(0, 0, 1, \frac{-1}{2})^T$

(b) $(1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1, 1)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(0, 0, 0, 1)^T$

11)(a) $\{v_1, v_2\}$

(b) $\{v_1, v_3\}$

12) $B = \{(1, 2, -2, 1)^T, (1, 0, -2, 2)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$.