MTM 5245 - 2014.1

Prof. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Lista de Exercícios - Espaços com Produto Interno 1

1. Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\left\langle (a, b, c, d)^T, (x, y, z, w)^T \right\rangle = 2ax + by + cz + dw$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

2. Sejam V e W espaços vetorias sobre $\mathbf{K}$ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V. Se $T : W \to V$ é uma transformação linear injetora, mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : W \times W \to \mathbf{K}$, definida por

$$\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle, \quad \forall\, u, v \in W$$

é um produto interno em W.

3. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

a) $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$
b) $\langle u, v \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

4. No espaço vetorial real de todos os polinômios reais, determine se

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1), \text{ onde } p \text{ e } q \text{ são polinômios,}$$

é um produto interno, e, em caso negativo, indique quais dos axiomas da definição de produto interno são violados.

5. Dizemos que dois vetores u e v são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$. Considere R^3 com o produto interno usual. Para quais valores de k podemos afirmar que u e v são ortogonais?

a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 7, k)$.
b) $u = (k, k, 1)$,$v = (k, 5, 6)$.

6. Seja $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Verifique se

$$\langle A, B \rangle = \det(AB)$$

define um produto interno em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno, e sejam u, v vetores de V. Suponha que $\langle u, v\rangle = 3 + 2i$. Calcule:

   a) $\langle (2-4i)u, v\rangle$
   b) $\langle u, (3+2i)v\rangle$.

8. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com produto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

   Calcule:

   a) $\langle 1, x\rangle$
   b) $\langle x, x^2\rangle$
   c) $\langle 1, x^2\rangle$