MTM 5245 - 2014.1

Prof. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Lista de Exercícios - Tranformações Lineares 1

1. Conseidere $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definida por:

$$D(p(x)) = p''(x).$$

   Determine o núcleo de D.

2. Determine se são verdadeiras ou falsas cada uma das seguintes afirmações sobre transformações lineares:
   a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ pode ser injetora.
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ com $\dim(\mathrm{Im}(T) = 3$ é injetora.
   c) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz $T(0) = 0$, então T é linear.
   d) Se $T : U \to V$ é injetora, então existe um $w \neq 0$, $w \in U$, tal que $T(w) = 0$.
   e) Se $T : V \to V$ possui inversa, então $\dim(\ker(T)) = \dim(V)$.

3. Encontre uma base para o núcleo e a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo:
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = a + ax + ax^2$.

   b) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

   c) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + dx^2$.

   d) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p)(x) = xp''(x)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,\ y,\ z) = (z,\ x,\ y)$, mostre que $T \circ T \circ T = I$ e encontre T^{-1}.

5. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3c - a & 3d - b \end{pmatrix}$.
   Encontre T^{-1}.

6. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(p) = (p(0),\ p(1),\ p(-1))$. Encontre T^{-1}.

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja imagem é gerada por (2, 1, 1) e $(1, -1, 2)$.
8. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, cuja núcleo é gerada por (1, 1, 0, 0) e $(0, 0, 1, 0)$.
9. Seja W o subespaço gerado por $\mathcal{B} = \{1,\ x,\ e^x,\ xe^x\}$. Determine $[D]_{\mathcal{B}}$, onde D é o operador derivada, $D(f(x)) = f'(x)$.