Logo, a matriz de L em relação a $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$ é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ □

Poderíamos ter encontrado D usando a matriz mudança de base $Y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ e calculando

$$D = Y^{-1}AY$$

Isso não foi necessário devido à simplicidade da ação de L na base $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$.

No Exemplo 2, o operador linear L é representado por uma matriz diagonal D em relação à base $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$. É muito mais simples trabalhar com D do que com A. Por exemplo, é mais fácil calcular $D\mathbf{x}$ e $D^n\mathbf{x}$ do que $A\mathbf{x}$ e $A^n\mathbf{x}$. De modo geral, é desejável encontrar a representação matricial mais simples possível para um operador linear. Em particular, se o operador puder ser representado por uma matriz diagonal, essa é, normalmente, a representação preferida. O problema de encontrar uma matriz diagonal associada a um operador linear será estudado no Cap. 6.

EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das transformações lineares L de R^2 em R^2 a seguir, determine a matriz A que representa L em relação a $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ (ver Exercício 1 da Seção 2) e a matriz B que representa L em relação a $[\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T, \mathbf{u}_2 = (-1, 1)^T$.

(a) $L(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$ (b) $L(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (c) $L(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$

(d) $L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}$ (e) $L(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_2$

2. Sejam $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ e $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ bases ordenadas de R^2, onde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seja L a transformação linear definida por

$$L(\mathbf{x}) = (-x_1, x_2)^T$$

e seja B a matriz de L em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ [do Exercício 1(a)].

(a) Encontre a matriz mudança de base S de $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$.

(b) Encontre a matriz A que representa L em relação a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ calculando SBS^{-1}.

(c) Verifique que

$$L(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$$

$$L(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$$

3. Seja L a transformação linear em R^3 definida por

$$L(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2)^T$$

e seja A a matriz de L em relação a $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ (ver Exercício 4 da Seção 3). Se $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)^T$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1)^T$, então $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ é uma base ordenada para R^3.

(a) Encontre a matriz mudança de base U de $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ para $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$.

(b) Determine a matriz B que representa L em relação a $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ calculando $U^{-1}AU$.

4. Seja L o operador linear de R^3 em R^3 definido por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e sejam

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontre a matriz mudança de base V de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ para $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ e use-a para encontrar a matriz B que representa L em relação a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$.

5. Seja L o operador em P_3 definido por

$$L(p(x)) = xp'(x) + p''(x)$$

(a) Encontre a matriz A que representa L em relação a $[1, x, x^2]$.
(b) Encontre a matriz B que representa L em relação a $[1, x, 1 + x^2]$.
(c) Encontre a matriz S tal que $B = S^{-1}AS$.
(d) Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2(1 + x^2)$, calcule $L^n(p(x))$.

6. Seja V o subespaço de $C[a, b]$ gerado por $1, e^x, e^{-x}$ e seja D o operador derivada em V.
(a) Encontre a matriz mudança de base S que corresponde à mudança das coordenadas em relação a $[1, e^x, e^{-x}]$ para $[1, \cosh x, \operatorname{senh} x]$. [$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$.]
(b) Encontre a matriz A que representa D em relação a $[1, \cosh x, \operatorname{senh} x]$.
(c) Encontre a matriz B que representa D em relação a $[1, e^x, e^{-x}]$.
(d) Verifique que $B = S^{-1}AS$.

7. Prove que, se A é semelhante a B e se B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

8. Suponha que $A = S\Lambda S^{-1}$, onde Λ é uma matriz diagonal com elementos diagonais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
(a) Mostre que $A\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i$, $i = 1, \ldots, n$.
(b) Mostre que, se $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{s}_1 + \alpha_2\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{s}_n$, então

$$A^k\mathbf{x} = \alpha_1\lambda_1^k\mathbf{s}_1 + \alpha_2\lambda_2^k\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k\mathbf{s}_n$$

(c) Suponha que $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, \ldots, n$. O que acontece com $A^k\mathbf{x}$ quando $k \to \infty$? Explique.

9. Suponha que $A = ST$, onde S é invertível. Seja $B = TS$. Mostre que B é semelhante a A.

10. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que, se A é semelhante a B, então existem matrizes S e T $n \times n$, com S invertível, tais que

$$A = ST \qquad \text{e} \qquad B = TS$$

11. Mostre que, se A e B são matrizes semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$.

12. Sejam A e B matrizes semelhantes. Mostre que:
(a) A^T e B^T são semelhantes;
(b) A^k e B^k são semelhantes para todo inteiro positivo k.

13. Mostre que, se A é semelhante a B e se A é invertível, então B também é invertível e A^{-1} e B^{-1} também são semelhantes.

14. O *traço* de uma matriz A $n \times n$, denotado por $\operatorname{tr}(A)$, é a soma de seus elementos diagonais, isto é,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Mostre que:
(a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
(b) se A é semelhante a B, então $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

15. Sejam A e B matrizes semelhantes e seja λ um escalar arbitrário. Mostre que:
(a) $A - \lambda I$ e $B - \lambda I$ são semelhantes;
(b) $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$.

EXERCÍCIOS COM O MATLAB PARA O CAPÍTULO 4

1. Use o MATLAB para gerar uma matriz W e um vetor $\mathbf{x}$ digitando

$$W = \texttt{triu(ones(5))} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = [1:5]'$$