11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma seqüência?
   (b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   (c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma seqüência convergente? Dê dois exemplos.
   (b) O que é uma seqüência divergente? Dê dois exemplos.

3–8 □ Liste os cinco primeiros termos da seqüência.

3. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$

8. $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

9–14 □ Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da seqüência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

9. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

10. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

14. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

15–40 □ Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

15. $a_n = n(n-1)$

16. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

17. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

18. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

19. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

20. $a_n = \dfrac{n}{1 + \sqrt{n}}$

21. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

22. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

23. $a_n = \cos(n/2)$

24. $a_n = \cos(2/n)$

25. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

26. $\{\operatorname{arctg} 2n\}$

27. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

28. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

29. $\{n^2 e^{-n}\}$

30. $\{n \cos n\pi\}$

31. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

32. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

33. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

34. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2 - 1}$

35. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{1/n}$

36. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

37. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

38. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

39. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

40. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

41–48 □ Use um gráfico da seqüência para decidir se a seqüência é convergente ou divergente. Se a seqüência for convergente, estime o valor do limite a partir do gráfico e então prove sua estimativa. (Veja a margem esquerda na página 704 com sugestões para gráficos de seqüências).

41. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

42. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$

43. $\left\{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$

44. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\right\}$

45. $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$

46. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

47. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

48. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

49. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1.000(1{,}06)^n$ dólares.
    (a) Encontre os cinco primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$.
    (b) A seqüência é convergente ou divergente? Explique.

50. Calcule os primeiros 40 termos da seqüência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número ímpar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo para $a_1 = 25$. Estabeleça uma conjectura sobre esse tipo de seqüência.

51. Para quais valores de r a seqüência $\{nr^n\}$ é convergente?

52. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

   (b) Uma seqüência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Assumindo que $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.

53. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a seqüência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

54–60 □ Determine se a seqüência dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A seqüência é limitada?

54. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

55. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

56. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

57. $a_n = \cos(n\pi/2)$

58. $a_n = ne^{-n}$

59. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

60. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

61. Calcule o limite da seqüência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

62. Uma seqüência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
   (a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema 11 para indicar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

63. Mostre que a seqüência definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - 1/a_n$ é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e calcule seu limite.

64. Mostre que a seqüência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a seqüência é convergente e encontre seu limite.

65. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a seqüência de Fibonacci definida no Exemplo 3(c).
   (b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Assumindo que $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.

66. (a) Seja $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.
   (b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

67. (a) Use um gráfico para estimar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

   (b) Use um gráfico da seqüência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondem a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 2.

68. Use a Definição 2 diretamente para provar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

69. Prove o Teorema 6.
[*Dica*: Use a Definição 2 ou o Teorema do Confronto.]

70. Seja $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   (a) Mostre que, se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

   (b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.
   (c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.
   (d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.
   (e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.
   (f) Use o Teorema 11 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Veja a Equação 3.8.6 do Volume I.)

71. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1 sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

   (a) Use a indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

   (b) Deduza que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas convergentes.
   (c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

72. (a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
   (b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

   encontre os oito primeiros membros da seqüência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

73. O tamanho de uma população de peixes pode ser modelado pela fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

onde p_n é o tamanho da população de peixes depois de n anos e a e b são as constantes positivas que dependem da espécie e de seu hábitat. Suponha que a população no ano 0 seja $p_0 > 0$.
   (a) Mostre que se $\{p_n\}$ é convergente, então os únicos valores possíveis para seu limite são 0 e $b - a$.
   (b) Mostre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
   (c) Use o item (b) para mostrar que, se $a > b$, daí $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; em outras palavras, a população morre.
   (d) Agora assuma que $a < b$. Mostre que, se $p_0 < b - a$, então $\{p_n\}$ é crescente e $0 < p_n < b - a$. Mostre também que, se $p_0 > b - a$, assim, $\{p_n\}$ é decrescente e $p_n > b - a$. Deduza que, se $a < b$, logo $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

NOTA 4 □ Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo: suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

é convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

segue-se que a série inteira $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ é convergente. Similarmente, se soubermos que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

11.2 Exercícios

1. (a) Qual é a diferença entre uma seqüência e uma série?
   (b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

2. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 □ Calcule pelo menos dez somas parciais da série. Plote ambas as seqüências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}6)^{n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1,5}} - \frac{1}{(n+1)^{1,5}}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

9. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
   (a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
   (b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

10. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

   (b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–34 □ Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

11. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} \dots$

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

13. $-2 + \frac{5}{2} - \frac{25}{8} + \frac{125}{32} - \cdots$

14. $1 + 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

25. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0{,}8)^{n-1} - (0{,}3)^n]$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

32. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+3)} + \frac{5}{4^n}\right)$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

35–40 □ Expresse o número como uma razão de inteiros.

35. $0{,}\overline{2} = 0{,}2222\dots$

36. $0{,}\overline{73} = 0{,}73737373\dots$

37. $3{,}\overline{417} = 3{,}417417417\dots$

38. $6{,}2\overline{54}$

39. $0{,}123\overline{456}$

40. $5{,}\overline{6021}$

41–45 □ Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para aqueles valores de x.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

46. Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos se aproximam de 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

também tem essa propriedade.

47–48 □ Use o comando de frações parciais em seu CAS para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o CAS para somar a série diretamente.

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n)^2}$

49. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

$$s_n = \frac{n-1}{n+1} \text{ encontre } a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

50. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for $s_n = 3 - n2^{-n}$ encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que recebem o dinheiro também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte e assim por diante. Os economistas chamam de *efeito multiplicador* essa reação em cadeia. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo gastando \$ D. Suponha que cada pessoa que recebe o dinheiro gasto gaste $100c\%$ e economize $100s\%$ do dinheiro que recebeu. Os valores de c e s são denominados *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.

(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Nota: O governo federal usa esse princípio para justificar o déficit. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

52. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que ela cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja derrubada a partir de uma altura inicial de H metros.

(a) Assumindo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre. (Use o fato de que a bola cai $\frac{1}{2}gt^2$ metros em t segundos.)

(b) Calcule o tempo total que a bola pula.

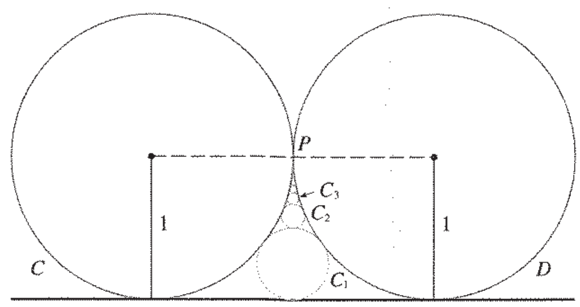
(c) Suponha que cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < k < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

53. Qual é o valor de c se $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$?

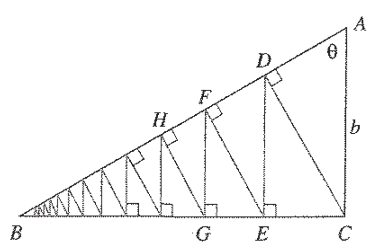
54. Plote as curvas $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Achando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

55. A figura exibe dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente em comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma seqüência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 6.



56. Um triângulo ABC é dado com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura.



Calcule o comprimento total de todas as retas perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.

57. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada.")

58. Suponha que $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) seja conhecida como uma série convergente. Prove que $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

59. Prove a parte (i) do Teorema 8.

60. Se $\Sigma\, a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\Sigma\, ca_n$ é divergente.

61. Se $\Sigma\, a_n$ for convergente e $\Sigma\, b_n$, divergente, mostre que a série $\Sigma\,(a_n + b_n)$ é divergente. [*Dica*: Argumente por contradição.]

62. Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem ambas divergentes, $\Sigma\,(a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

63. Suponha que uma série $\Sigma\, a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leq 1.000$ para todo n. Explique por que $\Sigma\, a_n$ deve ser convergente.

64. A seqüência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geq 3$$

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

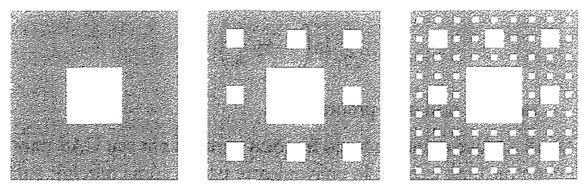
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

65. O **conjunto de Cantor**, em homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Isso nos leva a dois intervalos, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dividimos novamente cada intervalo em três e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio de cada intervalo aberto que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números que permanecem em $[0, 1]$ depois de todos os intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **carpete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do nono subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura apresenta as três primeiras etapas da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o carpete de Sierpinski tem área 0.



66. (a) A seqüência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pela equação $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geq 3$, onde a_1 e a_2 podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a_1 e a_2 e use sua calculadora para descobrir o limite da seqüência.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$ em termos de a_1 e a_2 expressando $a_{n+1} - a_n$ em termos de $a_2 - a_1$ e somando uma série.

67. Considere a série

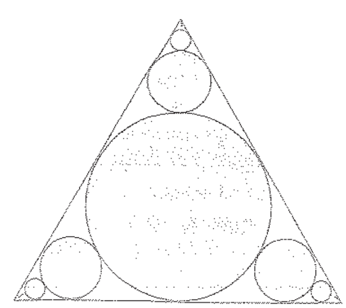
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Calcule as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para estimar uma fórmula para s_n.

(b) Use indução matemática para provar sua estimativa.

(c) Mostre que a série infinita dada é convergente e calcule sua soma.

68. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo eqüilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



(i) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então (4) fornece

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

já que $f(x) \geqslant 0$. Portanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para todo n, a seqüência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Também

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

visto que $a_{n+1} = f(n+1) \geqslant 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma seqüência crescente limitada, e assim ela é convergente pelo Teorema da Seqüência Monotônica (11.1.11). Isso significa que $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Mas (5) dá

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e, dessa forma, $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e assim $\sum a_n$ diverge. ◻

11.3 Exercícios

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 ◻ Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

9–24 ◻ Determine se a série é convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0,85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1,4} + 3n^{-1,2})$

11. $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$

14. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n-2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

25–28 □ Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

25. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

26. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

29. A função zeta ζ de Riemann é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

30. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro usando s_{10} como uma aproximação para a soma da série.
(b) Utilize (3) com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

31. (a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?
(b) Melhore essa estimativa usando (3) com $n = 10$.
(c) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor que 0,001.

32. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

33. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ com precisão de 0,01.

34. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria adicionar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

35. Mostre que, se queremos aproximar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$ de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que $10^{11.301}$ termos!

36. (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.
(b) Encontre um limite superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.
(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limite superior seja menor que 0,05?
(d) Encontre s_n para esse valor de n.

37. (a) Use (4) para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e que a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

38. Use as seguintes etapas para mostrar que a seqüência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)
(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use (5)] para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto $\{t_n\}$ é uma seqüência decrescente.
(c) Use o Teorema da Seqüência Monotônica para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

39. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

11.4 Os Testes de Comparação

Nos testes de comparação, a idéia é comparar uma série dada com uma que é sabidamente convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos lembra a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente. Como a série (1) é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Realmente, ela é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada (1) tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma seqüência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica: