Como $a_n \leqslant b_n$ para todo n, temos $R_n \leqslant T_n$. Se $\Sigma\, b_n$ for uma p-série, podemos estimar seu resto T_n como na Seção 11.3. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer caso, sabemos que R_n é menor que T_n.

EXEMPLO 5 □ Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\Sigma\, 1/n^3$ foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com $n = 100$, temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0{,}6864538$$

com erro menor que 0,00005. □

11.4 Exercícios

1. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e $\Sigma\, b_n$ seja sabidamente convergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

2. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e $\Sigma\, b_n$ seja sabidamente divergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

3–32 □ Determine se a série converge ou diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2 + 3^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{10^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

22. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7n}{3^n(n^2+5n-1)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 ▢ Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^5}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0,d_1d_2d_3\ldots$ (onde o dígito d_i é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 9$) é que

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Prove que, se $a_n \geqslant 0$ e $\sum a_n$ convergir então $\sum a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja convergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então $\sum a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja divergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

então $\sum a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos onde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ for convergente, então $\sum \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\sum a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ também é convergente?

46. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_nb_n$ também é convergente?

11.5 Séries Alternadas

Os testes de convergência que temos olhado se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas* cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Para termos uma idéia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5.040} + \cdots$$

Note que $$b_7 = \tfrac{1}{5.040} < \tfrac{1}{5.000} = 0{,}0002$$

e $$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$$

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada, sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002$$

□ Na Seção 11.10 provaremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para todo x; assim, o que obtivemos no Exemplo 4 é realmente uma aproximação para o número e^{-1}.

Esse erro menor que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal. Assim temos

$$s \approx 0{,}368$$

com precisão de três casas decimais. □

NOTA □ A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
   (b) Sob que condições uma série alternada converge?
   (c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 □ Teste a série para convergência ou divergência.

2. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} - \dfrac{1}{\ln 5} + \dfrac{1}{\ln 6} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21–22 □ Calcule as dez primeiras somas parciais da série e plote a seqüência de termos e a seqüência das somas parciais na mesma tela. Estime o erro ao usar a décima soma parcial para aproximar a soma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

23–26 □ Quantos termos da série precisamos adicionar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ $(|\text{erro}| < 0{,}01)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ $(|\text{erro}| < 0{,}001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ $(|\text{erro}| < 0{,}01)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ $(|\text{erro}| < 0{,}002)$

27–30 □ Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. A qüinquagésima soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ é uma estimativa por cima ou uma estimativa por baixo da soma total? Explique.

32–34 □ Para quais valores de p cada série é convergente?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\sum (-1)^{n-1} b_n$, onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e alternada harmônica.

(a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Do Exercício 38, da Seção 11.3, temos

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e portanto

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.

11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série $\sum a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

□ Temos testes de convergência para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos ficam trocando irregularmente? Veremos no Exemplo 3 que a idéia de convergência absoluta algumas vezes ajuda em tais casos.

> **1 Definição** Uma série $\sum a_n$ é chamada **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Note que, se $\sum a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e assim a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

EXEMPLO 1 □ A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma p-série convergente ($p = 2$). □

Rearranjos

A questão de uma série dada ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\Sigma\, a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Segue-se que

se $\Sigma\, a_n$ for uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de $\Sigma\, a_n$ tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrar esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Veja o Exercício 36 da Seção 11.5.) Se multiplicarmos essa série por $\frac{1}{2}$, obteremos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

□ A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na seqüência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Note que a série em (8) contém os mesmos termos que em (6), mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorre depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann provou que

se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma igual a r.

Uma prova desse fato é ilustrada no Exercício 40.

11.6 Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série $\Sigma\, a_n$ em cada um dos seguintes casos?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–28 □ Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5+n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}n!$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen } 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg} n)^n}$

25. $\displaystyle 1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$

26. $\displaystyle \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

29. Os termos de uma série são definidos recursivamente pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

30. Uma série $\Sigma\, a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

31. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. Para quais inteiros positivos k a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

é convergente?

33. (a) Mostre que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo x.
(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

34. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim $\Sigma\, a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule a soma parcial s_5 da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Use o Exercício 34 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.
(b) Calcule um valor de n de maneira que s_n aproxime a soma com precisão 0,00005. Use esse valor de n para aproximar a soma da série.

36. Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n/2^n$. Use o Exercício 34 para estimar o erro.

37. Prove que, se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

38. Prove o Teste da Raiz. [*Dica para a parte (i)*: Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ quando $n \geqslant N$.]

39. Dada uma série qualquer $\Sigma\, a_n$ definimos uma série $\Sigma\, a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\Sigma\, a_n$ e uma série $\Sigma\, a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Note que, se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que, se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.
(a) Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são convergentes.
(b) Se $\Sigma\, a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são divergentes.

40. Prove que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ cuja soma é r. [*Dicas*: Use a notação do Exercício 39. Tome um número apenas suficiente de termos positivos a_n^+ de modo que sua soma seja maior que r. Então adicione um número apenas suficiente de termos negativos a_n^- de tal modo que a soma cumulativa seja menor que r. Continue dessa maneira e use o Teorema 11.2.6.]

A série de comparação é $\Sigma\, b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EXEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Como a integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ é facilmente avaliada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona.

EXEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como a série envolve $k!$, usamos o Teste da Razão.

EXEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação.

11.7 Exercícios

1–38 □ Teste a convergência ou divergência das séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n^2+n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{1+8n}\right)^n$

7. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+25}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/2)}{n^2+4n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n\sqrt{n}}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$