A desigualdade $|x+2| < 3$ pode ser escrita como $-5 < x < 1$; assim, testamos a série nos extremos –5 e 1. Quando $x = -5$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência [$(-1)^n n$ não converge para 0]. Quando $x = 1$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então a série converge apenas quando $-5 < x < 1$, assim, o intervalo de convergência é (–5, 1). □

11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?
2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
   (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 □ Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 4^n x^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(x-1)^n$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n \ln n}$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} x^n$

29. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ for convergente, as séries que se seguem são convergentes?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$
30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$
31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Plote na mesma tela as primeiras somas parciais $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto com a função-soma $f(x) = 1/(1-x)$. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

33. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

é denominada *função de Bessel de ordem 1*.

(a) Encontre seu domínio.

(b) Plote as primeiras somas parciais na mesma tela.

(c) Se seu CAS tiver funções de Bessel programadas, plote J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam J_1.

34. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).

(a) Encontre o domínio da função de Airy.

(b) Plote as primeiras somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela.

(c) Se seu CAS tiver funções de Airy programadas, plote A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

35. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geqslant 0$. Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

36. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geqslant 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

37. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$ onde $c \neq 0$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

38. Suponha que a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ satisfaz $c_n \neq 0$ para todo n. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existe, então ele é igual ao raio de convergência da série de potências.

39. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$? Explique.

40. Suponha que o raio de convergência da série de potência $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio da série de potência $\sum c_n x^{2n}$?

11.9 Representações de Funções como Séries de Potências

□ Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da seqüência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

e a n-ésima soma parcial. Note que, quando n aumenta, $s_n(x)$ se torna melhor aproximação de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

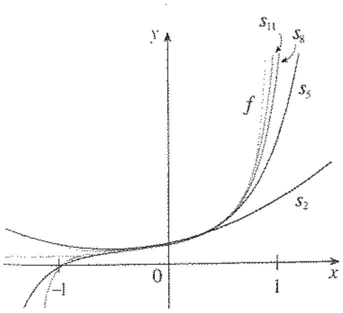


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries. Você pode imaginar por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar as funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

$$\boxed{1} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 5 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1-x)$ como uma soma de uma série de potências.

EXEMPLO 1 □ Expresse $1/(1+x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

□ Esse exemplo demonstra uma maneira na qual as representações em séries de potência são úteis. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas algébricos computacionais devolvem formas diferentes da resposta, mas eles são todos extremamente complicados. (Se você tiver um CAS, experimente-o.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um CAS.

SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando, $1/(1 + x^7)$, como uma soma de uma série de potências. Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para $|-x^7| < 1$, isto é, para $|x| < 1$.

(b) Aplicando o Teorema da Avaliação não importa qual antiderivada utilizamos; assim vamos usar a antiderivada da parte (a) com $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas, como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de adicionar os termos com $n = 3$, o erro é menor que o termo com $n = 4$:

$$\frac{1}{29\cdot 2^{29}} \approx 6{,}4 \times 10^{-11}$$

Assim temos

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374$$ □

11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual é o raio de convergência da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 □ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$ **12.** $f(x) = \dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

13. (a) Use diferenciação para achar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Ache uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual é o raio de convergência?

(b) Use item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x \ln(1+x)$.

(c) Use item (a) para achar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2+1)$.

15–18 Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

15. $f(x) = \ln(5-x)$ **16.** $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **18.** $f(x) = \text{arctg}(x/3)$

19–22 Encontre uma representação em série de potências para f, plote f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n aumenta?

19. $f(x) = \ln(3+x)$ **20.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+25}$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ **22.** $f(x) = \text{tg}^{-1}(2x)$

23–26 Avalie a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$ **24.** $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x-\text{tg}^{-1}x}{x^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \text{tg}^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

27. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^{0,4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2\,\text{tg}^{-1}(x^4)\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^6}$

31. Use o resultado do Exemplo 6 para calcular ln 1,1 com precisão de cinco casas decimais.

32. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Avalie $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ com precisão de três casas decimais.

34. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2-1) J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

36. Seja $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Mostre que a série $\Sigma f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\Sigma f_n''(x)$ converge?

37. Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

38. (a) Começando com a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $|x| < 1$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$, $|x| < 1$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Use a série de potências para $\operatorname{tg}^{-1} x$ para provar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Ao fatorar $x^3 + 1$ como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para provar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 Séries de Taylor e de Maclaurin

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: quais funções têm representações em série de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por uma série de potências.

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem ser termos de f. Para começar, note que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos depois do primeiro são 0 e obtemos

$$f(a) = c_0$$

Pelo Teorema 11.9.2, podemos diferenciar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora diferenciamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A diferenciação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

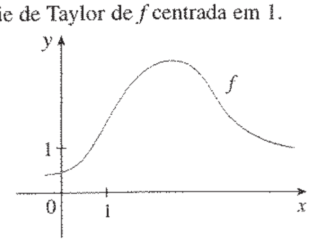
11.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.

2. (a) O gráfico de f é mostrado. Explique por que a série

   $$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

   não é a série de Taylor de f centrada em 1.



   (b) Explique por que a série

   $$2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$$

   não é a série de Taylor de f centrada em 2.

3–10 □ Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

3. $f(x) = \cos x$
4. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
5. $f(x) = (1+x)^{-3}$
6. $f(x) = \ln(1+x)$
7. $f(x) = e^{5x}$
8. $f(x) = xe^x$
9. $f(x) = \operatorname{senh} x$
10. $f(x) = \cosh x$

11–18 □ Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.]

11. $f(x) = 1 + x + x^2, \quad a = 2$
12. $f(x) = x^3, \quad a = -1$
13. $f(x) = e^x, \quad a = 3$
14. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$
15. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$
16. $f(x) \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$
17. $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 9$
18. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1$

19. Prove que a série obtida no Exercício 3 representa $\cos x$ para todo x.
20. Prove que a série obtida no Exercício 16 representa $\operatorname{sen} x$ para todo x.
21. Prove que a série obtida no Exercício 9 representa $\sinh x$ para todo x.
22. Prove que a série obtida no Exercício 10 representa $\cosh x$ para todo x.

23–32 □ Use uma série de Maclaurin derivada nesta seção para obter a série de Maclaurin para a função dada.

23. $f(x) = \cos \pi x$
24. $f(x) = e^{-x/2}$
25. $f(x) = x \operatorname{tg}^{-1} x$
26. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$
27. $f(x) = x^2 e^{-x}$
28. $f(x) = x \cos 2x$
29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad$ [*Dica*: Use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]
30. $f(x) = \cos^2 x$
31. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
32. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

33–36 □ Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Plote f e seus primeiros polinômios na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

33. $f(x) = \sqrt{1+x}$
34. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$
35. $f(x) = \cos(x^2)$
36. $f(x) = 2^x$

37. Encontre a série de Maclaurin para e^x e use-a para calcular $e^{-0.2}$ com precisão de cinco casas decimais.

38. Use a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ para calcular $\operatorname{sen} 3°$ com precisão de cinco casas decimais.

39–42 □ Avalie a integral indefinida como uma série infinita.

39. $\displaystyle\int x \cos(x^3)\, dx$
40. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$
41. $\displaystyle\int \sqrt{x^3 + 1}\, dx$
42. $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

43–46 □ Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

43. $\displaystyle\int_0^1 x \cos(x^3) dx$ (três casas decimais)
44. $\displaystyle\int_0^{0,2} [\operatorname{tg}^{-1}(x^3) + \operatorname{sen}(x^3)] dx$ (cinco casas decimais)
45. $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ ($|\text{erro}| < 10^{-8}$)
46. $\displaystyle\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ ($|\text{erro}| < 0{,}001$)

47–49 □ Use séries para avaliar o limite.

47. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{x^3}$
48. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$
49. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

50. Use a série do Exemplo 10(b) para avaliar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4 do Volume I usando a Regra de L'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

51–54 □ Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para cada função.

51. $y = e^{-x^2} \cos x$

52. $y = \sec x$

53. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

54. $y = e^x \ln(1 - x)$

55–60 □ Encontre a soma da série.

55. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

56. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

57. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

58. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

59. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

60. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

61. Prove a Desigualdade de Taylor para $n = 2$, isto é, prove que, se $|f'''(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{for } |x - a| \leq d$$

62. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual a sua série de Maclaurin.

(b) Plote a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.

Projeto de Laboratório — Um Limite Elusivo

Este projeto envolve a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Use seu sistema de computação algébrica (CAS) para avaliar $f(x)$ para $x = 1$; 0,1; 0,01; 0,001 e 0,0001. Parece que $f(x)$ tem um limite quando $x \to 0$?
2. Use CAS para plotar f próximo de $x = 0$. Parece que $f(x)$ tem um limite quando $x \to 0$?
3. Tente avaliar $\lim_{x \to 0} f(x)$ com a Regra de L'Hôspital, usando seu CAS para encontrar as derivadas do numerador e do denominador. O que você descobriu? Quantas aplicações da Regra de L'Hôspital são necessárias?
4. Avalie $\lim_{x \to 0} f(x)$ usando seu CAS para encontrar quantos termos foram necessários da série de Taylor do numerador e do denominador. (Use o comando Taylor no Maple ou Series no Mathematica.)
5. Use o comando *limit* em seu CAS para achar o $\lim_{x \to 0} f(x)$ diretamente. (A maioria dos sistemas de computação algébrica usa o método do Problema 4 para calcular os limites.)
6. Tendo em vista as respostas aos Problemas 4 e 5, como você explica os resultados dos Problemas 1 e 2?