8.18 – EXERCÍCIOS – pg. 407

1. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de 12 cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P, que dista $x\ cm$ da extremidade esquerda, é $(5x+7)\ kg/cm$

$$m = \int_a^b \rho\,(x)\,dx$$

$$m = \int_0^{12} (5x+7)\,dx$$

$$= 5\frac{x^2}{2} + 7x\Big|_0^{12}$$

$$= \frac{5}{2}.144 + 7\,.12$$

$$= 444\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{12} x\,(5x+7)\,dx$$

$$= \frac{1}{144}\left(5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{12}$$

$$= \frac{3384}{444}$$

2. Encontrar a massa total e o centro de massa de uma barra de comprimento $3m$, se a densidade linear da barra num ponto situado a $x\ m$ do extremo esquerdo é $(5x^2+3)\,kg/m$.

$$\rho(x) = 5x^2 + 3$$

$$m = \int_0^3 (5x^2+3)\,dx$$

$$= 5\,\frac{x^3}{3} + 3x\Big|_0^3$$

$$= 54\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_a^b x\ \rho(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{54}\int_0^3 x\left(5x^2+3\right) dx$$

$$= \frac{1}{54}\left(5\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{1}{54}\cdot\frac{459}{4}$$

$$\cong 2{,}125$$

3. Calcular a massa total e o centro de massa de uma barra de $5m$ de comprimento, sabendo que a densidade linear num ponto é uma função do 1° grau da distância total deste ponto ao extremo direito da barra. A densidade linear no extremo direito é $5\,kg/m$ e no meio da barra é $2\,kg/m$

$$\rho(x) = k_1(5-x)+k_2$$

$$\rho(5) = k_2 = 5$$

$$\rho(2{,}5) = 2{,}5k_1 + k_2 = 2 \quad \therefore \quad k_1 = -1{,}2$$

$$m = \int_0^5 \left[-1{,}2\,(5-x)+5\right] dx$$

$$= \int_0^5 \left(-6+1{,}2x+5\right) dx$$

$$= \int_0^5 \left(1{,}2x-1\right) dx$$

$$= 1{,}2\frac{x^2}{2} - x\Bigg|_0^5$$

$$= 10\ kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\int_0^5 x\,(1{,}2x - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left(1{,}2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{150}{3} - \frac{25}{2}\right)$$

$$= 3{,}75$$

4. Uma barra horizontal esta localizada sobre o eixo dos x, como mostra a figura 8.105. Se a densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância deste ponto até a origem, determinar o valor da constante de proporcionalidade, de modo que a massa da barra seja

$$m = \frac{b+a}{2}\ u.\,m.$$

$$\rho(x) = kx$$

$$m = \int_a^b kx\,dx$$

$$= k\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$k\left(b^2 - a^2\right) = b + a$$

$$k = \frac{b+a}{b^2 - a^2}$$

$$= \frac{1}{b-a}$$

5. O comprimento de uma barra é 2m e a densidade linear no extremo direito é $1 kg/m$. A densidade linear num ponto varia diretamente com a segunda potência da distância do ponto ao extremo esquerdo. Calcular a massa total e o centro de massa da barra.

$$\rho(x) = kx^2$$

$$\rho(2) = k \,.\, 4 = 1 \quad \therefore \quad k = \frac{1}{4}$$

$$m = \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\, kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2/3} \int_0^2 x \,.\, \frac{1}{4} x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

6. Determinar o momento de inércia de uma barra homogênea de 3 cm de comprimento, em relação a um eixo perpendicular, que:

a) passa no ponto médio da barra;
b) passa por uma extremidade da barra.

Considerar a densidade linear da barra igual a $0{,}8\; kg/m$

$$I_l = \int_a^b d^2(x)\, \rho(x) dx$$

a) $d(x) = |x - 1{,}5|$

$$I_l = \int_0^3 (x - 1{,}5)^2 \,.\, k\; dx$$

$$= k \,.\, \frac{(x-1{,}5)^3}{3}\bigg|_0^3$$

$$= 2{,}25\, k \quad (k = 0{,}8)$$

$$= 2{,}25 \,.\, 0{,}8$$

$$= 1{,}8\; kg \,.\, m^2$$

b) $d(x) = (3 - x)$

$$I_l = \int_0^3 (3 - x)^2 \,.\, k\, dx$$

$$= k \,.\, \frac{(3 - x)^3}{3}\Bigg|_0^3$$

$$= 9\, k$$

$$= 9 \,.\, 0{,}8$$

$$= 7{,}2\; kg \,.\, m^2$$

OBS.: no outro extremo temos $\displaystyle\int_0^3 x^2 k\; dx \begin{array}{l} = 9k \\ = 7{,}2\; kg \,.\, m^2 \end{array}$

7. Uma barra horizontal mede $8\,m$ de comprimento. No seu ponto médio a densidade linear é $0{,}8\; kg/m$ e cresce proporcionalmente com o quadrado da distância até este ponto. Se numa das extremidades a densidade é $16{,}8\; kg/m$, determinar a massa e o centro de massa da barra

$$\rho(4) = 0{,}8$$

$$\rho(x) = k\,(x - 4)^2 + 0{,}8$$

$$\rho(8) = 16\, k + 0{,}8 = 16{,}8 \quad \therefore \quad k = 1$$

$$m = \int_0^8 \left((x - 4)^2 + 0{,}8\right) dx$$

$$= \frac{(x - 4)^3}{3} + 0{,}8x\Bigg|_0^8$$

$$= 49{,}07\; kg$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^8 x\left[(x-4)^2 + 0{,}8\right]dx$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^8 x\left(x^2 - 8x + 16 + 0{,}8\right)dx$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{x^4}{4} - 8\frac{x^3}{3} + 16{,}8\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{1}{49{,}07}\,.196{,}27 \cong 3{,}9997$$

8. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 7 em relação a um eixo perpendicular que:
    a) passa no ponto médio da barra;
    b) passa por uma das extremidades da barra.

a)

$$I_l = \int_0^8 \left(0{,}8 + (x-4)^2\right)(x-4)^2\,dx$$

$$= \int_0^8 \left(0{,}8(x-4)^2 + (x-4)^4\right)\,dx$$

$$= 0{,}8\,.\frac{(x-4)^3}{3} + \frac{(x-4)^5}{5}\Bigg|_0^8$$

$$\cong 443{,}73\,kg.m^2$$

b)

$$I_l = \int_0^8 \left(0{,}8 + (x-4)^2\right)(8-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^8 \left(0{,}8 + x^2 - 8x + 16\right)\left(64 - 16x + x^2\right)dx$$

$$= \int_0^8 \left(1075{,}20 - 780{,}8x + 208{,}8x^2 - 24x^3 + x^4\right)dx$$

$$= 1228{,}8\,kg.m^2$$

9. Achar o momento de inércia da barra dos exercícios 1 e 3 para um eixo perpendicular que:

a) passa pelo extremo direito;
b) passa pelo extremo esquerdo;
c) passa pelo ponto médio da barra.

Exercício 1
(a)

$$I_l = \int_0^{12} (12-x)^2\,(5x+7)\,dx$$
$$= \int_0^{12} \left(720x + 1008 - 120x^2 - 168x + 5x^3 + 7x^2\right) dx$$
$$= 5\frac{x^4}{4} - 113\frac{x^3}{3} + 552\frac{x^2}{2} + 1008x \Big|_0^{12}$$
$$= 12672\ kg\ .\ cm^2$$

(b)

$$I_l = \int_0^{12} \left(5x^3 + 7x^2\right) dx$$
$$= 5\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} \Big|_0^{12}$$
$$= 29\,952\ kg\ .\ cm^2$$

(c)

$$I_l = \int_0^{12} (x-6)^2\,(5x+7)\,dx$$
$$\int_0^{12} \left(x^2 - 12x + 36\right)(5x+7)\,dx$$
$$= \int_0^{12} \left(5x^3 + 7x^2 - 60x^2 - 84x + 180x + 252\right) dx$$
$$= 5\frac{x^4}{4} - 53\frac{x^3}{3} + 96\frac{x^2}{2} + 252x \Big|_0^{12}$$
$$= 5328\ kg\ .\ cm^2$$

Exercício 3
(a)

$$I_l = \int_0^5 [-1,2\,(5-x)+5]\,(5-x)^2\ dx$$

$$= \int_0^5 \left[-1,2\,(5-x)^3 + 5\,(5-x)^2\right] dx$$

$$= 1,2\frac{(5-x)^4}{4} - 5\frac{(5-x)^3}{3}\Bigg|_0^5$$

$$\cong 20,83\ kg\ .\ m^2$$

(b)

$$I_l = \int_0^5 [-1,2\,(5-x)+5]\,x^2\ dx$$

$$= \int_0^5 [-6+1,2x+5]\,x^2\ dx$$

$$= \int_0^5 \left(-x^2 + 1,2x^3\right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 1,2\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^5$$

$$= 145,83\ kg\ .\ m^2$$

(c)

$$I_l = \int_0^5 (2,5-x)^2[-1,2\,(5-x)+5]\,dx$$

$$= \int_0^5 \left[\left(6,25-5x+x^2\right)(-6+1,2x)+5\right]\ dx$$

$$= \int_0^5 \left[7,5x+5x-x^2-6x^2+1,2x^3-6,25\right] dx$$

$$= -6,25x + 12,5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1,2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^5$$

$$\cong 20,833\ kg\ .\ m^2$$

10. Uma barra localizada sobre o eixo dos x tem extremos $x=0$ e $x=4$. Se a densidade linear é dada por $\rho(x)=\dfrac{1}{x+1}$, determinar a massa e o centro de massa da barra.

$$m=\int_0^4 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=\ln|x+1|\Big|_0^4=\ln 5\; u.m.$$

$$\bar{x}=\frac{1}{\ln 5}\int_0^4 x\,.\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{\ln 5}\int_0^4\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\ln 5}\left(x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^4$$

$$=\frac{4-\ln 5}{\ln 5}$$

$$=\frac{4}{\ln 5}-1$$

11. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 10 em relação a um eixo perpendicular que passa no ponto $x=-1$

$$I_l=\int_0^4 \frac{1}{x+1}(x+1)^2\,dx$$

$$=\int_0^4 (x+1)\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^4$$

$$=12$$

12. Determinar a massa e o centro de massa de uma barra que esta localizada sobre o eixo dos x, com extremos nos pontos $x=0$ e $x=1$. A densidade linear da barra é dada por $\rho(x)=e^x$

$$m=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1\; u.m$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^1 x\, e^x\, dx$$

$$= \frac{1}{m}\left(x\, e^x - e^x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{e-1}(e - e + 1)$$

$$= \frac{1}{e-1}$$

13. Determinar o momento de inércia da barra do exercício 12 em relação a um eixo perpendicular que passa pela origem

$$I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$= \left(x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x\right)\Big|_0^1$$

$$= e - 2e + 2e - 2$$

$$= e - 2$$

14. Uma barra homogênea mede $3\, m$ de comprimento. Se o seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular que passa por uma de suas extremidades é $22{,}5\, kg\, .\, m^2$, determinar a densidade linear da barra.

$$I = \int_0^3 x^2 k\; dx \qquad \rho(x) = k$$

$$= k\, \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{k}{3}\, .\, 27 = 9k$$

$$9k = 22{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{22{,}5}{9} = 2{,}5$$

$$\rho = 2{,}5 kg / m$$

15. Uma mola tem comprimento natural de $10\, m$. Sob um peso de $5N$, ela se distende $3\, m$:
    a) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de seu comprimento natural até $25\, m$.
    b) Determinar o trabalho realizado para distender a mola de $11\, m$ a $21\, m$

$$f(x) = kx$$
$$5 = 3k$$
$$k = \frac{5}{3} \quad \therefore \quad f(x) = \frac{5}{3}x$$

a)

$$w = \int_0^{15} \frac{5}{3}x\,dx = \frac{5}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{15}$$
$$= 187{,}5J$$

b)

$$w = \int_1^{11} \frac{5}{3}x\,dx$$
$$= \frac{5}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_1^{11}$$
$$= 100J$$

16. Uma força de $12N$ é necessária para comprimir uma mola de um comprimento natural de $8\,m$ para um comprimento de $7\,m$. Encontrar o trabalho realizado para comprimir a mola de seu comprimento natural para um comprimento de $2\,m$

$$f = kx; 12 = k.1 \quad \therefore \quad k = 12$$

$$w = \int_0^{6} 12x\,dx = 12\frac{x^2}{2}\Big|_0^{6}$$
$$= 216J$$

17. Uma mola tem comprimento natural de $12\,m$. Para comprimi-la de seu comprimento natural até $9\,m$, usamos uma força de $500\,N$. Determinar o trabalho realizado ao comprimir a mola de seu comprimento natural até $5\,m$.

$$f = kx;\ 500 = 3k$$
$$k = 500/3$$

$$w = \int_0^{7} \frac{500}{3}\,x\,dx = \frac{500}{3}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{7}$$
$$= \frac{12\,250}{3}J$$

18. Um balde pesa $5N$ e contém argila cujo peso é $30N$. O balde está no extremo inferior de uma corrente de $50\,m$ de comprimento, que pesa $5N$ e está no fundo de um poço. Encontrar o trabalho necessário para suspender o balde até a borda do poço.

peso balde + peso argila $35N$

O peso de um metro da corrente é $\frac{1}{10}N$.

Quando o balde subiu x, o peso correspondente da corrente é: $(50-x).0,1$.

$$f(x)=35+(50-x)\,.\,0,1$$

$$w=\int_0^{50}\left(35+(50-x)\,.\,0,1\right)dx$$

$$=35x+5x-0,1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{50}$$

$$=1875J$$

19. Um tanque cilíndrico circular reto, de raio $1,2\ m$ e altura $3m$ está cheio de água, achar o trabalho efetuado para esvaziar o tanque, pela parte superior.

$$w=\int_0^3 9,807.1000\,.\pi\,(1,2)^2.\ (3-y)dy$$

$$=\pi\,(1,2)^2.1000.9,807\left.\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^3$$

$$=63549,36\ J$$

20. Um tanque cilíndrico circular reto de $2m$ de diâmetro e $3m$ de profundidade, está cheio de água e deve ser esvaziado pela parte superior. Determinar o trabalho necessário para esvaziar o tanque:
    a) considerando que a água seja deslocada por um muro de um embolo, partindo da base do tanque;
    b) por bombeamento.

a)

$$w = \int_0^3 9807\pi .1^2 .(3-y)\,dy$$

$$= 9807\,\pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= 44131{,}5\,\pi\ J$$

b)

$$w = \int_0^3 9807\pi(3-y)\,dy$$

$$= 9807\pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= 44131{,}5\pi J$$

21. Um tanque tem a forma de um cone circular reto, de altura $20m$ e raio da base $102\ cm$. Se o tanque está cheio de água, encontrar o trabalho realizado para bombear a água pelo topo do tanque.

$$\frac{x-0}{y-0} = \frac{1{,}02}{20} \quad \therefore \quad x = \frac{1{,}02y}{20} = 0{,}051y$$

raio: $0{,}051y$

$$w = \int_0^{20} 9807\,\pi\,(0{,}051y)^2(20-y)dy$$

$$= 9807\,\pi .\,0{,}002601\int_0^{20}\left(20y^2 - y^3\right)dy$$

$$= 25{,}508\,\pi\left(20\,\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{20}$$

$$= 340106{,}66\pi J$$

22. Um reservatório cheio de água é da forma de um paralelepípedo retângulo de $1{,}40\ m$ de profundidade, $4m$ de largura e $8m$ de comprimento. Encontrar o trabalho necessário para bombear a água do reservatório ao nível de $1m$ acima da superfície.

$$w = \int_0^{1,40} 9807\,.\,32\,.\,(2{,}40 - y)dy$$

$$= 9807.32\left(2{,}40y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1,40}$$

$$= 746901{,}12J$$

23. Uma comporta vertical de uma represa tem a forma de um retângulo de base $4m$ e altura $2m$. O lado superior da comporta está a $0{,}5m$ abaixo da superfície da água. Calcular a força total que essa comporta está sofrendo.

$$F = \int_0^2 9807(2{,}5 - y)\,.\,4\,dy$$

$$= 39228\left(2{,}5y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 117684\ N$$

24. Um tanque tem a forma de um prisma quadrangular de altura $1m$. Se o tanque está cheio de água e o seu lado da base mede $3m$, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado do tanque

$$F = \int_0^1 9807\,(1 - y)\,(3 - 0)dy$$

$$= \int_0^1 9807\,(3 - 3y)dy$$

$$= 9807\left(3y - 3\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 14710{,}5\ N$$

25. Uma chapa tem a forma da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$. Se esta chapa é imersa verticalmente na água, de tal forma que seu lado superior coincide com o nível d'água, determinar a força decorrente da pressão da água sobre um lado da chapa.

$$F = \int_0^4 9807\,(4 - y)\left(\sqrt{y} + \sqrt{y}\right)dy$$

$$= 9807\int_0^4 (4 - y)\,2\sqrt{y}\;dy$$

$$= 9807\,.\,2\left(4\,.\,\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 167372{,}8\;N$$

26. Uma chapa retangular de $1m$ de altura e $2m$ de largura é imersa verticalmente num liquido, sendo que sua base inferior esta a $3m$ da superfície do liquido. Determinar a força total exercida sobre um lado da chapa, se o liquido pesa $4000\;N/m^3$.

$$F = \int_0^1 4000\,(3 - y)\,2\;dy$$

$$= 8000\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 8000\left(3 - 1/2\right)$$

$$= 20000 = 2\,.\,10^4\;N$$

Nos exercícios de 27 a 30, temos uma comporta de uma represa, colocada verticalmente, com a forma indicada. Calcular a força total contra a comporta.

27. Um retângulo com $30m$ de largura e $10m$ de altura; nível d'água: $2m$ acima da base da comporta.

$$F = \int_0^2 9807\,(2-y)\,30\,dy$$

$$= 9807\,.\,30\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 588420\ N$$

28. Um trapézio isósceles com $30m$ de largura no topo, $20m$ de largura na base e $8m$ de altura; nível da água coincide com o topo da comporta.

$$F = \int_0^8 9807\,(8-y)\,.\,2\,.\,\frac{5y+80}{8}dy$$

$$= \frac{9807}{4}\int_0^8 \left(40y + 640 - 5y^2 - 80y\right)\ dy$$

$$= \frac{9807}{4}\left(640y - \frac{5y^3}{3} - 40\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 7322560\ N$$

29. Um triângulo isósceles com $16m$ de altura no topo e $10m$ de altura; nível da água coincide com o topo da comporta.

$$F = \int_0^{10} 9807\,(10-y)\left(4/5\,y + 4/5\,y\right)dy$$

$$= \int_0^{10} 9807\,(10-y)\,\frac{8}{5}y\ \ dy$$

$$= \int_0^{10} 9807\left(16y - \frac{8}{5}y^2\right)dy$$

$$= 9807\left(16\,.\,\frac{y^2}{2} - \frac{8}{5}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 2615200\ N$$

30. Um trapézio isósceles com $17m$ de largura no topo, $9m$ na base e $5m$ de altura; nível da água: $2m$ acima da base da comporta.

$$F = \int_0^2 9807\,(2-y)\,2\left(\frac{4}{5}y+4{,}5\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\int_0^2 (2-y)\left(\frac{4}{5}y+4{,}5\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\int_0^2 \left(\frac{8}{5}y+9-\frac{4}{5}y^2-4{,}5y\right)dy$$

$$= 2\,.\,9807\left(\frac{8}{5}\frac{y^2}{2}+9y-\frac{4}{5}\frac{y^3}{3}-4{,}5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 197447{,}6\ N$$

31. O topo de um tanque tem $3m$ de comprimento e $2m$ de largura. As extremidades são triângulos eqüiláteros verticais, com um vértice apontando para baixo. Qual é a força total em uma extremidade do tanque, quando ele está cheio de um líquido que pesa $12000\ N/m^3$?

$$F = \int_0^{\sqrt{3}} 12000\left(\sqrt{3}-y\right)2\,\frac{y}{\sqrt{3}}\,dy$$

$$= 24000\left(\frac{y^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 12000 = 12\,.\,10^3\ N$$

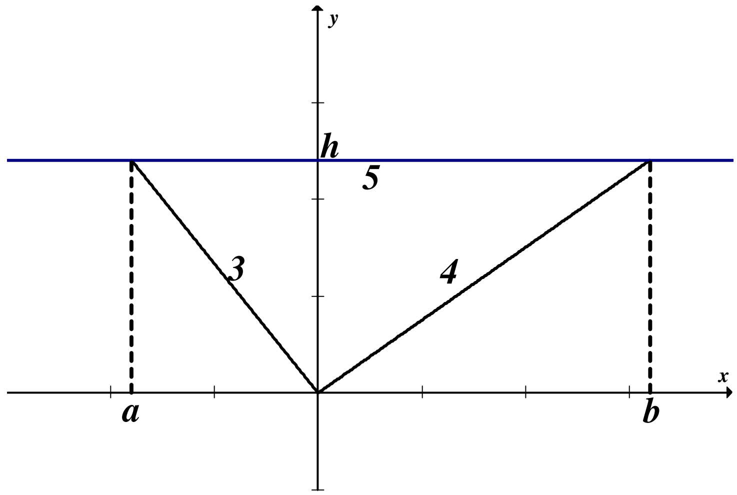
32. Uma chapa é limitada pela curva $y = x^{2/3}$ e a reta $y = 1$, no plano xy, com o eixo dos y apontando para cima e suas escalas medidas em metros. A chapa está submersa em óleo, cujo peso é $9600\ N/m^3$, com a reta $y = 1$ sobre a superfície do óleo. Qual é a força do óleo em cada lado da chapa?

$$F = \int_0^1 9600\,(1-y)\,2\,.\,y^{3/2}\,dy$$

$$= 19200\left(\frac{y^{5/2}}{5/2}-\frac{y^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\cong 2194{,}28\ N$$

33. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo de lados 3,4 e 5m. A lâmina está imersa verticalmente num líquido de tal forma que a hipotenusa coincide com o nível do líquido. Determinar a força exercida pelo líquido sobre um lado da lâmina se o peso do líquido é $6500\ N/m^3$



Cálculo de *h*:

A área do triângulo pode ser expressa como:

Área: $A = \frac{3\,.\,4}{2} = 6$ ou $A = \frac{5h}{2}$.

Portanto,

$$\frac{5h}{2} = 6$$

$$h = 12/5$$

Cálculo de *a*:

$$3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + a^2$$

$$a = -9/5$$

Cálculo de *b*:

$$4^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + b^2$$

$$b = 16/5$$

Equação da reta que passa por $(0,0)\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$

$$x=\frac{-3}{4}y$$

Equação da reta que passa por $(0,0)\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$

$$x=\frac{4}{3}y$$

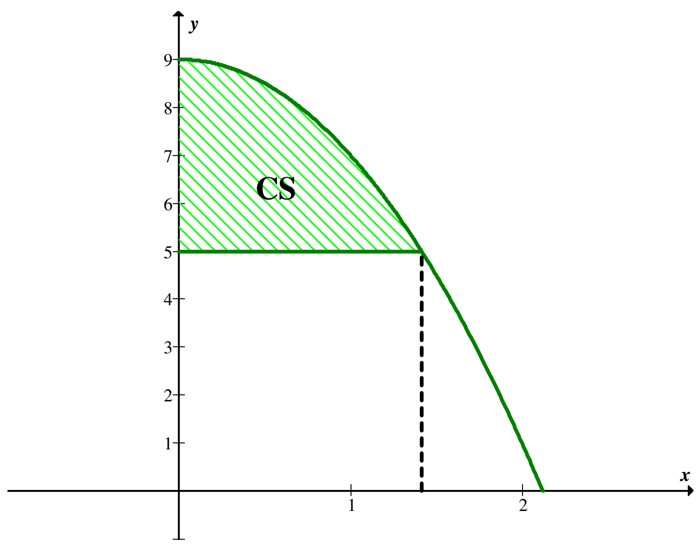
Assim temos:

$$F=\int_0^{12/5}6500\left(\frac{12}{5}-y\right)\left(\frac{4}{3}y+\frac{3}{4}y\right)dy$$

$$=31200\ N$$

34. A função demanda para um certo produto é dada por $p=-2x^2+9$ sendo p o preço unitário em reais e x a quantidade demandada semanalmente. Determine o excedente de consumo se o preço de mercado é estabelecido a R$ 5,00 cada unidade do produto.

A figura que segue mostra o gráfico da função demanda e a área que representa o excedente de consumo.



Temos:

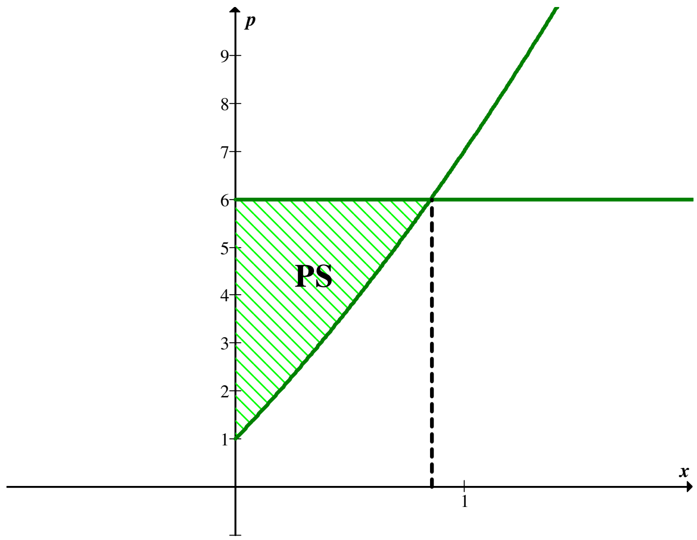
$$CS=\int_0^{\sqrt{2}}(-2x^2+9-5)dx$$

$$=-2\frac{x^3}{3}+4x\Big|_0^{\sqrt{2}}\cong 3{,}77$$

Resposta: R$3,77

35. Um fornecedor de produtos de limpeza estabelece que a quantidade de mercadoria a ser colocada no mercado está relacionada com o preço p, em reais, pela função $p = x^2 + 5x + 1$. Se o preço de mercado é igual a R$6,00, encontrar o excedente de produção.

A figura que segue mostra a área a ser calculada.



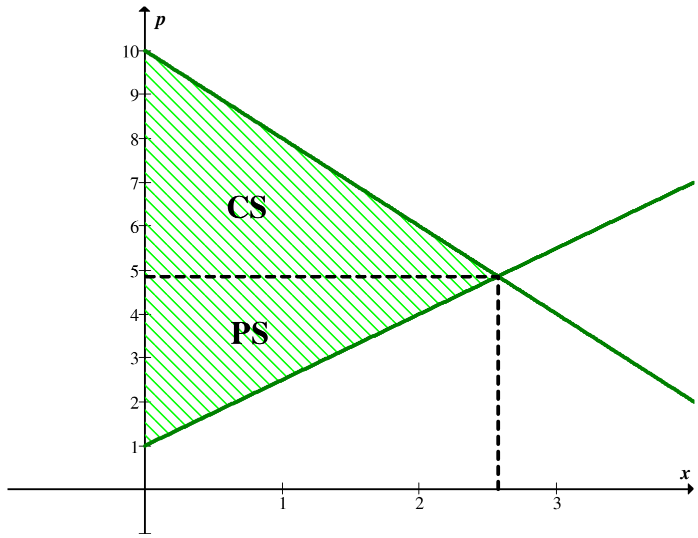
Temos:

$$PS = \int_0^{3\sqrt{5}/2-5/2} (6 - x^2 - 5x - 1)dx \cong 2{,}24$$

Resposta: R$2,24

36. A quantidade demandada de um certo produto A está relacionada ao preço unitário p, em reais, por $p = 10 - 2x$ e a quantidade x (em unidades) que o fornecedor está disposto a colocar no mercado está relacionada ao preço unitário p por $p = \frac{3}{2}x + 1$. Se o preço de mercado é igual ao preço de equilíbrio, determine o excedente de consumo e o excedente de produção.

A figura que segue ilustra o problema



Temos:
Ponto de equilíbrio: $(18/7, 34/7)$

$$CS = \int_0^{18/7} (10 - 2x - \tfrac{34}{7})dx \cong 6{,}61\,.$$

$$PS = \int_0^{18/7} (\frac{34}{7} - \frac{3}{2}x - 1)dx \cong 4{,}96.$$

37 Estima-se que um investimento gerará renda à taxa de $R(t)$ igual a R$180.000,00 por ano, pelos próximos três anos. Determine o valor presente deste investimento se a taxa de juros é de 6% ao ano, compostos continuamente.

$$VP = \int_0^3 180.000 \times e^{-0{,}06t} dt \cong 494.189{,}36$$