8

Cônicas

As Seções Cônicas

Sejam duas retas *e* e *g* concorrentes em O e não-perpendiculares. Conservemos fixa a reta *e* e façamos *g* girar 360 graus em torno de *e* mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta *g* gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O (Figura 8.1).

A reta *g* é chamada *geratriz* da superfície cônica e a reta *e*, *eixo* da superfície.

Chama-se *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*, ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a cônica será:

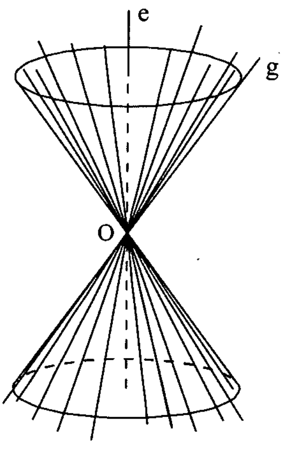


Figura 8.1

a) uma *parábola*, se π for paralelo a uma geratriz da superfície (Figura 8.2(a));
b) uma *elipse*, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (Figura 8.2(b)) (ou uma circunferência, se π for perpendicular ao eixo).
c) uma *hipérbole*, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície (Figura 8.2(c)). A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície.

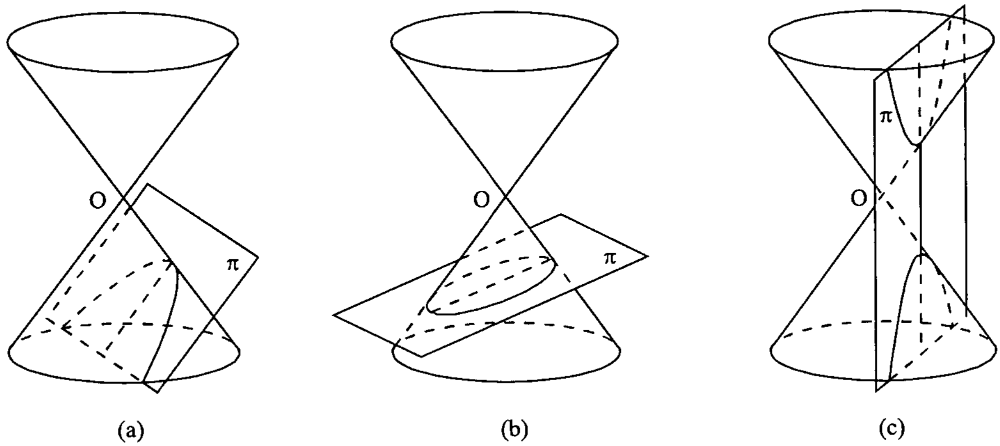


Figura 8.2

Observação

As superfícies cônicas apresentadas nas Figuras 8.2 e 8.3 devem ser encaradas como ilimitadas, isto é, constituídas de duas folhas que se estendem indefinidamente em ambos os sentidos.

Se cada um dos planos secantes da Figura 8.2 forem transladados paralelamente até chegarem ao vértice O, obteremos as respectivas cônicas "degeneradas" da Figura 8.3:

(a) uma reta
(b) um ponto
(c) duas retas

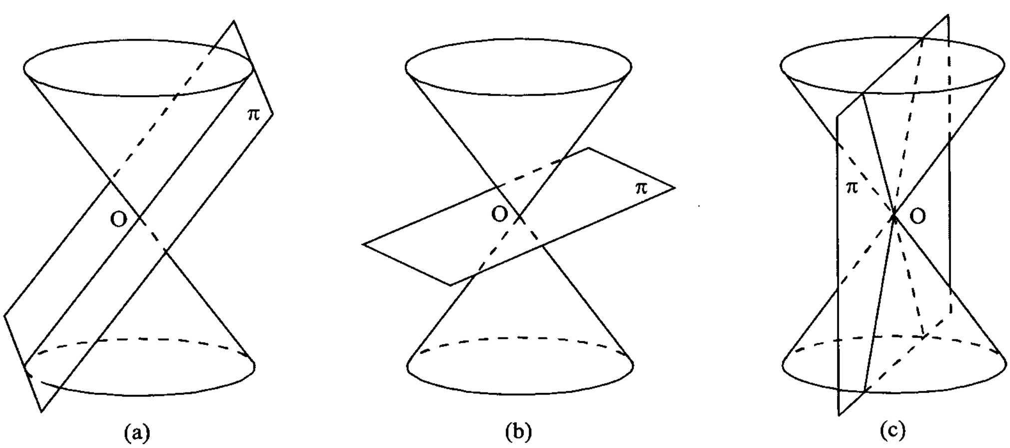


Figura 8.3

As *cônicas* foram de fundamental importância para o desenvolvimento da astronomia, sendo descritas na antigüidade por Apolônio de Perga, um geômetra grego.

Mais tarde, Kepler e Galileu mostraram que essas curvas ocorrem em fenômenos naturais, como nas trajetórias de um projétil ou de um planeta. No final deste capítulo estão descritas as *propriedades de reflexão* para cada uma das cônicas com algumas de suas aplicações.

No Museu de Ciências e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul encontra-se um experimento que diz respeito às propriedades da reflexão anteriormente referidas, chamado *reflexão sonora*. Trata-se das *Parábolas Acústicas*. Na verdade, são parabolóides constituídos por duas antenas parabólicas metálicas (fotos da Figura 8.4). Estas antenas de mesmo tamanho estão perfeitamente alinhadas e dispostas uma em frente a outra e separadas por aproximadamente 20 m (para maior nitidez foram necessárias duas fotos, razão pela qual a idéia desta distância não foi possível passar). O anel metálico num determinado ponto representa o foco da antena. Quando uma pessoa fala, emitindo o som próximo ao anel (foto da esquerda), as ondas sonoras refletidas na superfície da antena produzem um feixe de ondas paralelas que, ao incidirem na outra antena, refletem-se convergindo para o foco (anel) desta. Então, uma outra pessoa com o ouvido próximo deste anel (foto da direita) ouve nitidamente a primeira.

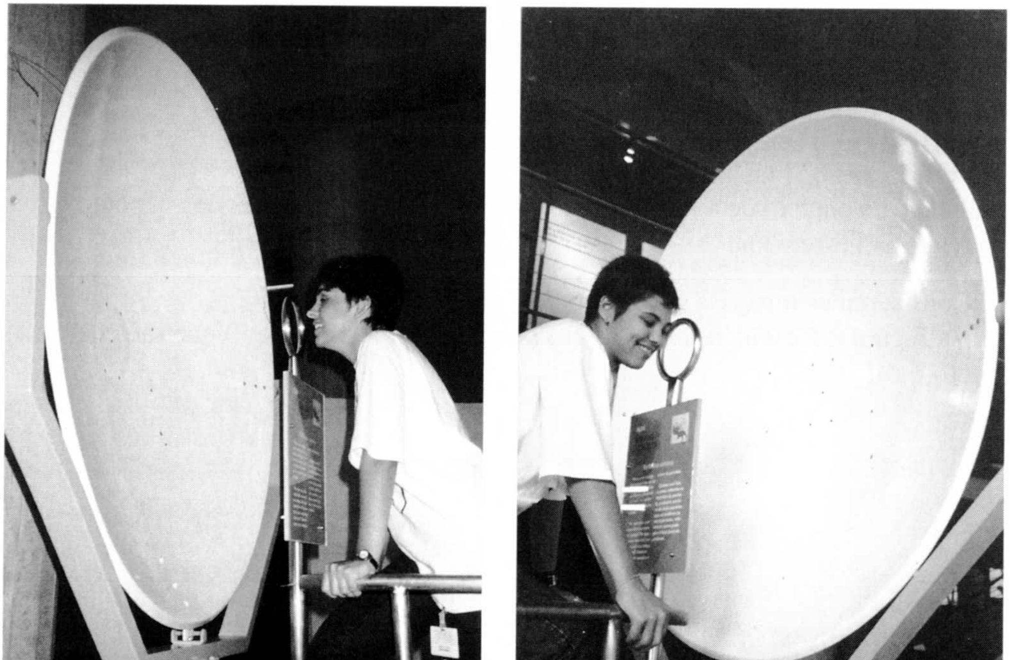


Figura 8.4

A Figura 8.4(a) esquematiza o experimento descrito anteriormente.

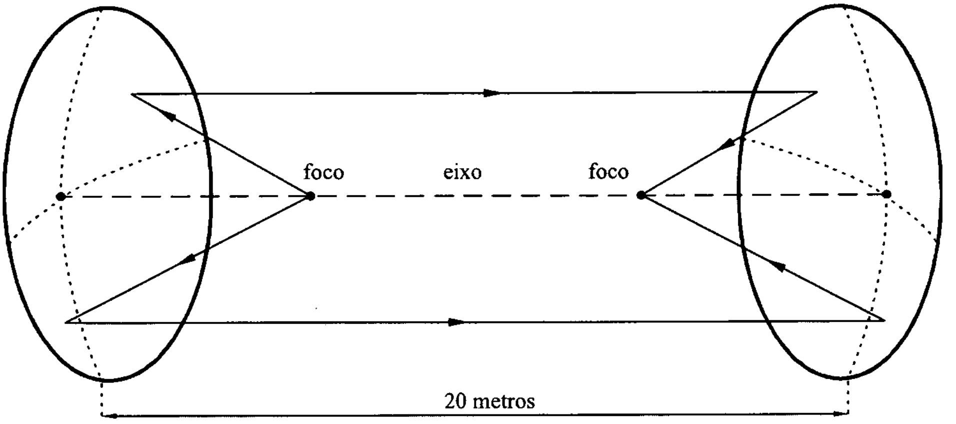


Figura 8.4 (a)

É importante observar que as cônicas são curvas planas e, portanto, tudo o que dissermos sobre parábola, elipse e hipérbole se passa num plano.

PARÁBOLA

Definição

Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Consideremos uma reta d e um ponto F não pertencente a d.

Na Figura 8.5 estão assinalados cinco pontos (P_1, P_2, V, P_3 e P) que são eqüidistantes do ponto F e da reta d.

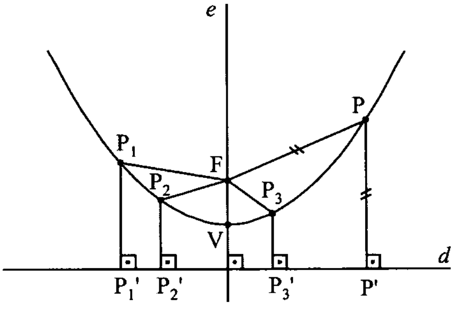


Figura 8.5

Então, um ponto P qualquer pertencente à parábola, se e somente se,

$$\boxed{d(P, F) = d(P, d)}$$

ou, de modo equivalente

$$d(P, F) = d(P, P') \qquad (1)$$

onde P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta *d*.

Elementos

Pela Figura 8.5, tem-se:

Foco: é o ponto F.

Diretriz: é a reta *d*.

Eixo: é a reta *e* que passa por F e é perpendicular a *d*. É fácil ver pela própria definição de parábola que esta curva é *simétrica* em relação ao seu eixo.

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Equações reduzidas

Seja a parábola de vértice V(0,0). Consideremos dois casos:

1º) *O eixo da parábola é o eixo dos y*

Seja P(x,y) um ponto qualquer da parábola (Figura 8.6) de foco $F(0, \frac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$.

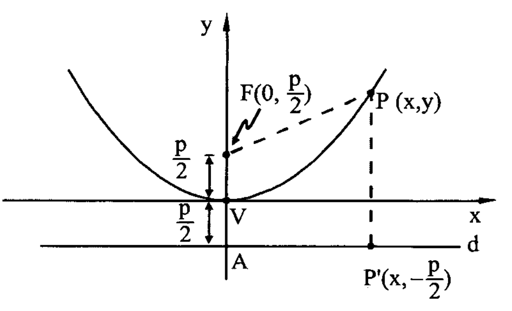


Figura 8.6

A definição de parábola expressa pela igualdade (1) é equivalente a

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$$

Como $P'(x, -\frac{p}{2}) \in d$, vem

$$\left|(x - 0, y - \frac{p}{2})\right| = \left|(x - x, y + \frac{p}{2})\right|$$

ou

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

ou simplesmente,

$$\boxed{x^2 = 2py \qquad (2)}$$

que é a equação *reduzida* para este caso.

Observações

a) O número real $p \neq 0$ é chamado parâmetro da parábola.

b) Da equação (2) conclui-se: como $py \geq 0$, o parâmetro p e a ordenada y de P têm sinais iguais ($py = 0$ se $y = 0$) e, conseqüentemente, se $p > 0$ a parábola tem abertura para cima e, se $p < 0$, para baixo (Figura 8.7).

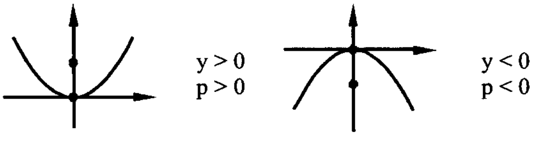


Figura 8.7

c) O gráfico da equação (2) é simétrico em relação ao eixo dos y pois substituindo-se x por -x a equação não se altera, isto é, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, o ponto (-x, y) também pertence.

2º) O eixo da parábola é o eixo dos x

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola (Figura 8.8) de foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e diretriz $x = -\frac{p}{2}$ obteremos, de forma análoga ao 1º caso, a equação reduzida

$$\boxed{y^2 = 2px \qquad (3)}$$

Da análise da equação (3) conclui-se imediatamente: se $p > 0$, a parábola tem abertura para a direita e se $p < 0$, para a esquerda (Figura 8.9 a seguir).

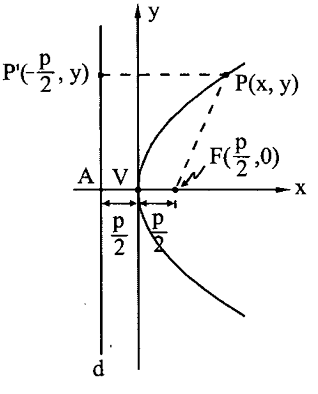


Figura 8.8

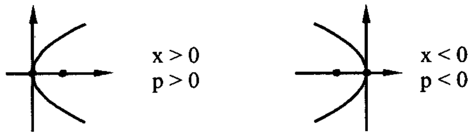


Figura 8.9

Exemplos

1) Para cada uma das parábolas $x^2 = 8y$ e $x = -\frac{1}{2}y^2$, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz.

Solução

a) $x^2 = 8y$

Observemos que nesta equação, a cada valor de y, por exemplo, 2, correspondem dois valores de x simétricos, no caso, 4 e -4. Logo, os pontos (4, 2) e (-4, 2) pertencem à parábola (Figura 8.10).

Como a equação é da forma

$x^2 = 2py$, tem-se

$2p = 8$

$p = 4$

$\frac{p}{2} = 2$

Portanto,

foco: F(0,2)

diretriz: y = -2

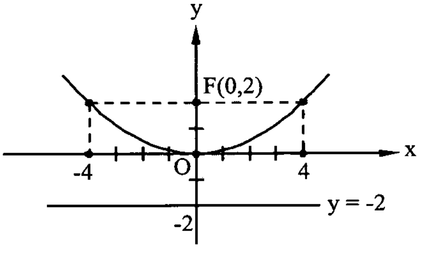


Figura 8.10

b) A equação reduzida de $x = -\frac{1}{2}y^2$ é

$y^2 = -2x$

Observemos que nesta equação, a cada valor de x, por exemplo, -2, correspondem dois valores de y simétricos, no caso, 2 e -2. Logo, os pontos (-2, 2) e (-2, -2) pertencem à parábola (Figura 8.11).

Como a equação é da forma $y^2 = 2px$, tem-se

$2p = -2$

$p = -1$

$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$

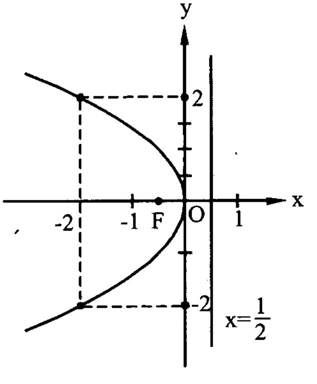


Figura 8.11

Portanto,

foco: $F(-\frac{1}{2}, 0)$

diretriz: $x = \frac{1}{2}$

2) Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições:

a) vértice V(0, 0) e foco F(1, 0)

b) vértice V(0, 0) e diretriz y = 3

c) vértice V(0, 0), passa pelo ponto P(-2, 5) e concavidade voltada para cima.

Solução

a) A equação é da forma

$y^2 = 2px$ (Figura 8.12 - o eixo da parábola é Ox)

Mas,

$\frac{p}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad p = 2$

ou

$2p = 4$

Substituindo este valor de 2p na equação acima, obtemos

$y^2 = 4x$

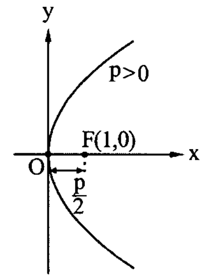


Figura 8.12

b) A equação é da forma

$x^2 = 2py$ (Figura 8.13 - o eixo da parábola é Oy)

Mas

$\frac{p}{2} = -3 \quad \text{ou} \quad 2p = -12$

Logo, a equação é

$x^2 = -12y$

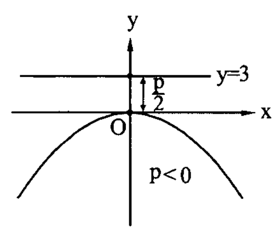


Figura 8.13

c) A equação é da forma

$x^2 = 8y$ (Figura 8.14 – o eixo da parábola é Oy)

Como P pertence à parábola, o ponto (-2, 5) é uma solução da equação, isto é, a afirmação

$(-2)^2 = 2p(5)$

é verdadeira. Daí vem

$2p = \frac{4}{5}$

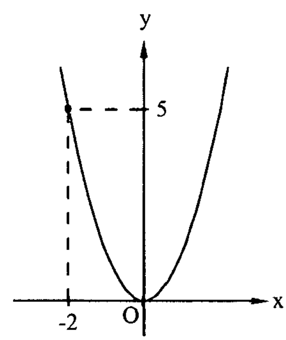


Figura 8.14

e, portanto, a equação desejada é

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

ou

$$5x^2 - 4y = 0$$

Translação de Eixos

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto O'(h,k), arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema x'O'y' tal que os eixos O'x' e O'y' tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Assim, todo ponto P do plano tem duas representações: P(x,y) no sistema xOy e P(x', y') no sistema x'O'y' (Figura 8.15)

Desta figura obtém-se

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

ou (4)

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

que são as *fórmulas de translação.*

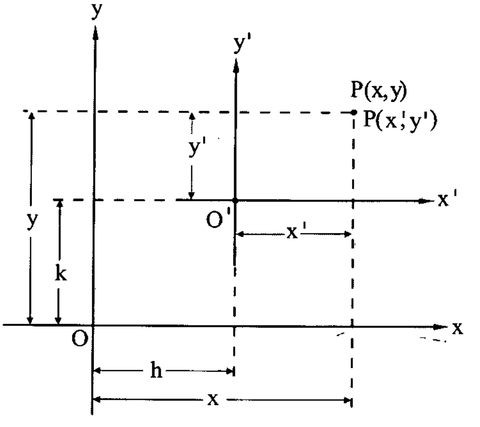


Figura 8.15

Outras Formas da Equação de Parábola

Seja uma parábola de vértice V(h, k) ≠ (0, 0). Consideraremos somente os casos de o eixo da parábola ser paralelo a um dos eixos coordenados.

1°) *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

Com origem no ponto V, tracemos o sistema x'O'y' (O'=V) nas condições do que foi visto no item anterior (Figura 8.16).

A parábola em relação a este sistema tem vértice na origem e, portanto, sua equação reduzida é

$$x'^2 = 2py' \qquad (5)$$

Como para todo ponto P da parábola, por (4) temos

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

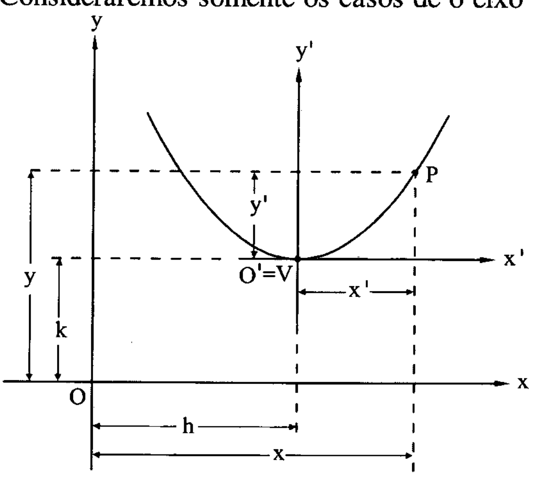


Figura 8.16

e pela substituição em (5) resulta a equação

$$\boxed{(x - h)^2 = 2p(y - k)}$$

que é a *forma padrão* para este caso e referida ao sistema xOy.

As observações feitas anteriormente com relação ao parâmetro p continuam válidas: se $p > 0$, a parábola está voltada para cima e, estará para baixo, se $p < 0$.

2º) *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x*

De modo análogo temos

$$\boxed{(y - k)^2 = 2p(x - h)}$$

Outras formas da equação da parábola serão apresentadas no próximo exemplo.

Exemplos

1) Determinar uma equação da parábola de vértice V(3, -2), eixo paralelo ao dos y e parâmetro $p = 1$.

Solução

Como o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y, sua equação é da forma

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

e, neste caso, temos

$$(x - 3)^2 = 2(1)(y + 2)$$

ou

$$(x - 3)^2 = 2(y + 2) \qquad (6)$$

e cujo gráfico é o da Figura 8.17.

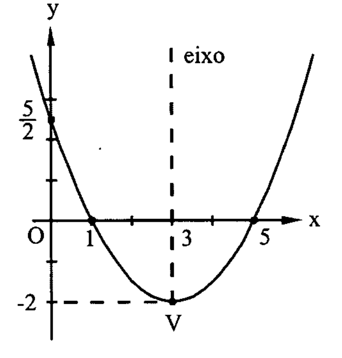


Figura 8.17

A equação (6) ainda pode receber a forma

$$x^2 - 6x + 9 = 2y + 4$$

ou

$$x^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \qquad (7)$$

que é a *Equação Geral* desta parábola.

Assim, qualquer parábola cujo eixo coincide ou é paralelo a um dos eixos coordenados, sempre pode ser representada pela equação geral que terá uma das formas

$$\boxed{ax^2 + cx + dy + f = 0} \quad a \neq 0 \qquad (8)$$

ou

$$\boxed{by^2 + cx + dy + f = 0} \quad b \neq 0 \qquad (9)$$

Se em (7) isolarmos o valor de y, teremos

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

que é a *Equação Explícita* da parábola deste exemplo.

Então, sempre que explicitarmos y numa equação do tipo (8) ou x numa equação do tipo (9), obteremos a respectiva equação explícita na forma

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \quad a \neq 0$$

ou

$$\boxed{x = ay^2 + by + c} \quad a \neq 0$$

2) Seja a parábola de vértice V(4, 2) e foco F(1, 2). Traçar um esboço do gráfico e determinar sua equação geral.

Solução

a) Um esboço do gráfico: Figura 8.18.
b) Tendo em vista que o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x, sua equação na forma padrão é

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

e como

$$h = 4, k = 2, \frac{p}{2} = -3 \therefore 2p = -12,$$

a equação acima fica

$$(y-2)^2 = -12(x - 4)$$

Efetuando as operações indicadas e ordenando, vem

$$y^2 - 4y + 4 = -12x + 48$$

ou

$$y^2 + 12x - 4y - 44 = 0$$

que é uma equação geral desta parábola.

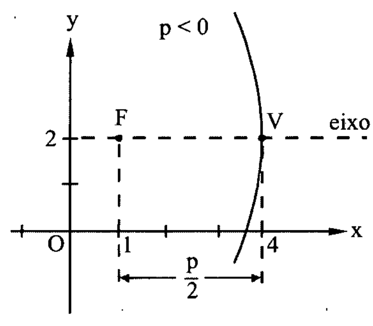


Figura 8.18

3) Determinar uma equação da parábola da Figura 8.19.

Solução

Entre a equação na forma padrão e a explícita, a segunda é mais simples para este problema.

Então, como o eixo desta parábola é paralelo ao dos y, sua equação é da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

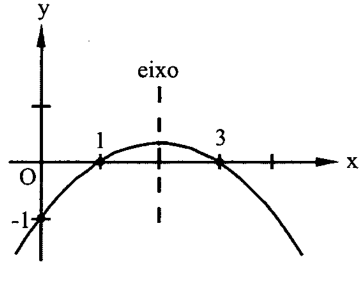


Figura 8.19

Ora, sendo (0, -1), (1, 0) e (3, 0) pontos da parábola, suas coordenadas devem satisfazer esta equação, isto é,

$$\begin{cases} -1 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 0 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ e $c = -1$

Logo, a equação da parábola é

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$$

4) Dada a parábola de equação $y^2 + 6y - 8x + 17 = 0$, determinar

a) sua equação reduzida;
b) o vértice;
c) um esboço do gráfico;
d) o foco e uma equação da diretriz;
e) uma equação do eixo.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$y^2 + 6y = 8x - 17$$

Completemos o quadrado do primeiro membro:

$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

Como adicionamos 9 ao primeiro membro, devemos fazer o mesmo com o membro da direita. A última equação pode ser escrita

$$(y + 3)^2 = 8(x - 1) \qquad (10)$$

que é a forma padrão de uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos x. Então, se em (10) utilizarmos as fórmulas de translação

$$x' = x - 1 \text{ e } y' = y + 3$$

obteremos

$$y'^2 = 8x'$$

que é a *equação reduzida* desta parábola referida ao sistema $x'O'y'$, onde $O' = V$ (vértice), $O'x' // Ox$ e $O'y' // Oy$.

b) Como a equação (10) é da forma padrão

$$(y-k)^2 = 2p(x-h) \qquad (11)$$

onde h e k são as coordenadas do vértice, vem imediatamente: V(1, -3).

c) Um esboço do gráfico: Figura 8.20.

d) Confrontando (10) e (11) concluímos:

$$2p = 8,\ p = 4,\ \frac{p}{2} = 2$$

e pelo gráfico tem-se

foco: F(3, -3)

diretriz: x = -1

e) Eixo: y = -3

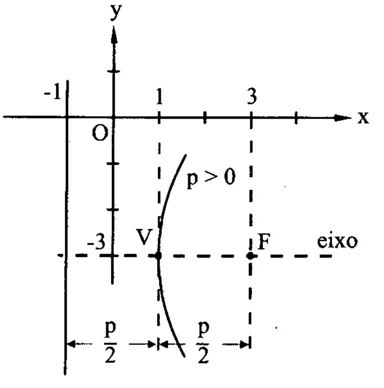


Figura 8.20

Equações Paramétricas

Consideremos a equação reduzida da parábola cujo eixo é o dos y:

$$x^2 = 2py$$

Nesta equação, onde x pode assumir qualquer valor real, se fizermos x = t (t é chamado parâmetro) teremos $y = \frac{1}{2p}t^2$.

Então, *equações paramétricas* da parábola são, neste caso, dadas por

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

De igual forma, se na equação $y^2 = 2px$ fizermos y = t, o sistema

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

constitui equações paramétricas da parábola com vértice V(0,0) e eixo Ox.

Com procedimento semelhante, obtém-se equações paramétricas no caso de o vértice da parábola não ser a origem do sistema, conforme exemplo a seguir.

Exemplos

Obter equações paramétricas da parábola de equação:

1) $x^2 = \frac{1}{4}y$

2) $(y-3)^2 = 2(x+2)$

Solução

1) Se fizermos x = t, teremos $y = 4t^2$ e, portanto, o sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}$$

constitui equações paramétricas desta parábola.

2) Fazendo y - 3 = t, vem y = t + 3. Então

$$t^2 = 2(x+2)$$

ou

$$t^2 = 2x + 4$$

e

$$x = \frac{t^2 - 4}{2}$$

Assim, o sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 4}{2} \\ y = t + 3 \end{cases}$$

constitui equações paramétricas desta parábola.

Por outro lado, de y = t + 3, vem t = y - 3, que substituindo na primeira equação resulta

$$x = \frac{(y-3)^2 - 4}{2}$$

ou

$$(y-3)^2 = 2(x+2)$$

que é a equação cartesiana dada inicialmente.

Problemas Propostos

Para cada uma das parábolas dos problemas de 1 a 10, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz.

1) $x^2 = -4y$

2) $y^2 = 6x$

3) $y^2 = -8x$

4) $x^2 + y = 0$

5) $y^2 - x = 0$

6) $y^2 + 3x = 0$

7) $x^2 - 10y = 0$

8) $2y^2 - 9x = 0$

9) $y = \dfrac{x^2}{16}$

10) $x = -\dfrac{y^2}{8}$

Nos problemas de 11 a 26, traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas.

11) vértice: $V(0, 0)$; diretriz d: $y = -2$

12) foco: $F(2, 0)$; diretriz d: $x + 2 = 0$

13) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(0, -3)$

14) vértice: $V(0, 0)$; foco: $F(-\frac{1}{2}, 0)$

15) foco: $F(0, -\frac{1}{4})$; diretriz d: $4y - 1 = 0$

16) vértice: $V(0, 0)$; simetria em relação ao eixo dos y e passa pelo ponto $P(2,-3)$

17) vértice: $V(0, 0)$; eixo $y = 0$; passa por $(4,5)$

18) vértice: $V(-2, 3)$; foco: $F(-2, 1)$

19) vértice: $V(2, -1)$; foco: $F(5, -1)$

20) vértice: $V(4, 1)$; diretriz d: $y + 3 = 0$

21) vértice: $V(0, -2)$; diretriz: $2x - 3 = 0$

22) foco: $F(4, -5)$; diretriz: $y = 1$

23) foco: $F(-7, 3)$; diretriz: $x + 3 = 0$

24) foco: $F(3, -1)$; diretriz: $2x - 1 = 0$

25) vértice: $V(4, -3)$; eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P(2, 1)$

26) vértice: $V(-2, 3)$; eixo: $x + 2 = 0$, passando pelo ponto $P(2, 0)$

Em cada um dos problemas de 27 a 36, determinar a equação reduzida, o vértice, o foco, uma equação da diretriz e uma equação do eixo da parábola de equação dada. Esboçar o gráfico.

27) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

28) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$

29) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

30) $y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$

31) $y = \frac{x^2}{4} - 2x - 1$

32) $x^2 - 12y + 72 = 0$

33) $y = x^2 - 4x + 2$

34) $y = 4x - x^2$

35) $y^2 - 12x - 12 = 0$

36) $2x^2 - 12x - y + 14 = 0$

Nos problemas de 37 a 39, encontrar a equação explícita da parábola que satisfaça as condições:

37) eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passando pelos pontos A(-2, 0), B(0, 4) e C(4, 0).

38) eixo de simetria paralelo a x = 0 e passando pelos pontos A(0, 0), B(1, -1) e C(3, -1).

39) eixo paralelo a y = 0 e passando por A(-2, 4), B(-3, 2) e C(-6, 0).

40) Dada a parábola de equação $y = -x^2 + 4x + 5$, determinar:

a) o vértice;

b) as interseções com os eixos coordenados;

c) o gráfico;

d) o foco;

e) uma equação da diretriz.

Nos problemas de 41 a 44, obter equações paramétricas da parábola de equação dada.

41) $y^2 = -4x$

42) $x^2 = 2y$

43) $(x+4)^2 = -2(y-1)$

44) $y^2 - 4y + x + 1 = 0$

Nos problemas 45 e 46, obter uma equação geral da parábola dada por equações paramétricas.

45) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{t^2}{3} - 2 \end{cases}$

46) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{4} + 4 \\ y = t \end{cases}$

47) Em que pontos a parábola de vértice V(-2, 0) e foco F(0, 0) intercepta o eixo dos y?

48) Encontrar sobre a parábola $y^2 = 4x$ um ponto tal que sua distância à diretriz seja igual a 3.

49) Utilizar a definição para encontrar uma equação da parábola de foco e diretriz dados:

a) F(-3, 4);
d: y = 2

b) F(0, 3);
d: x-2 = 0

50) Determinar uma equação da curva gerada por um ponto que se move de modo que sua distância ao ponto A(-1, 3) seja igual à sua distância à reta y + 3 = 0.

51) Encontrar uma equação da parábola e suas interseções com os eixos coordenados, sendo dados:

a) foco: F(0, 0), eixo: y = 0 e passa por A(3, 4);

b) foco: F(0, -1), eixo: x = 0 e passa por A(4, 2).

52) Na Figura 8.21, o arco DC é parabólico e o segmento AB está dividido em 8 partes iguais. Sabendo que d = 10 m, AD = BC = 50 m e AB = 80 m, determinar h_1 e h_2.

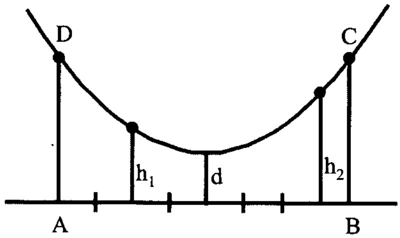


Figura 8.21

53) Uma família de parábolas tem equação $y = ax^2 + bx + 8$. Sabendo que uma delas passa pelos pontos (1,3) e (3,-1), determinar:
a) os pontos de interseção com o eixo dos x;
b) os pontos de ordenada 15;
c) equações paramétricas desta parábola.

54) Dados os sistemas de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \sqrt{2t} \\ y = t + 3, \quad t \in [0, 8] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -t \\ y = \dfrac{t^2}{2} + 3, \quad t \in [-4, 0], \end{cases}$$

mostrar que eles representam parte de uma mesma parábola, esboçando o gráfico.

Respostas de Problemas Propostos

1) $F(0, -1)$, $y = 1$

2) $F(\frac{3}{2}, 0)$, $2x + 3 = 0$

3) $F(-2, 0)$, $x = 2$

4) $F(0, -\frac{1}{4})$, $y = \frac{1}{4}$

5) $F(\frac{1}{4}, 0)$, $x = -\frac{1}{4}$

6) $F(-\frac{3}{4}, 0)$, $4x - 3 = 0$

7) $F(0, \frac{5}{2})$, $2y + 5 = 0$

8) $F(\frac{9}{8}, 0)$, $8x + 9 = 0$

9) $F(0, 4)$, $y + 4 = 0$

10) $F(-2, 0)$, $x = 2$

11) $x^2 = 8y$

12) $y^2 = 8x$

13) $x^2 = -12y$

14) $y^2 = -2x$

15) $x^2 = -y$

16) $3x^2 + 4y = 0$

17) $4y^2 - 25x = 0$

18) $x^2 + 4x + 8y - 20 = 0$

19) $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$

20) $x^2 - 8x - 16y + 32 = 0$

21) $y^2 + 4y + 6x + 4 = 0$

22) $x^2 - 8x + 12y + 40 = 0$

23) $y^2 - 6y + 8x + 49 = 0$

24) $4y^2 + 8y - 20x + 39 = 0$

25) $y^2 + 6y + 8x - 23 = 0$

26) $3x^2 + 12x + 16y - 36 = 0$

27) $x'^2 = -8y'$, $V(-2, -1)$, $F(-2, -3)$, $y = 1$, $x = -2$

28) $x'^2 = 20y'$, $V(1, -2)$, $F(1, 3)$, $y = -7$, $x = 1$

29) $y'^2 = -16x'$, $V(3, -2)$, $F(-1, -2)$, $x = 7$, $y = -2$

30) $y'^2 = 16x'$, $V(3, -1)$, $F(7, -1)$, $x = -1$, $y = -1$

31) $x'^2 = 4y'$, $V(4, -5)$, $F(4, -4)$, $y = -6$, $x = 4$

32) $x'^2 = 12y'$, $V(0, 6)$, $F(0, 9)$, $y = 3$, $x = 0$

33) $x'^2 = y'$, $V(2, -2)$, $F(2, -\frac{7}{4})$, $y = -\frac{9}{4}$, $x = 2$

34) $x'^2 = -y'$, $V(2, 4)$, $F(2, \frac{15}{4})$, $4y - 17 = 0$, $x - 2 = 0$

35) $y'^2 = 12x'$, $V(-1, 0)$, $F(2, 0)$, $x = -4$, $y = 0$

36) $x'^2 = \frac{1}{2}y'$, $V(3, -4)$, $F(3, -\frac{31}{8})$, $8y + 33 = 0$, $x = 3$

37) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

38) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

39) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 2y - 6$

40) a) $V(2, 9)$ b) $(-1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$

d) $F(2, \frac{35}{4})$ e) $4y - 37 = 0$

41) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}t^2 \\ y = t \end{cases}$

42) $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

43) $\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 1 - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

44) $\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = t + 2 \end{cases}$

45) $x^2 - 2x - 3y - 5 = 0$

46) $y^2 - 4x + 16 = 0$

47) $(0, 4)$ e $(0, -4)$

48) $(2, \sqrt{8})$ e $(2, -\sqrt{8})$

49) a) $x^2 + 6x - 4y + 21 = 0$

b) $y^2 - 6y + 4x + 5 = 0$

50) $x^2 + 2x - 12y + 1 = 0$

51) a) $y^2 - 4x - 4 = 0$, $(-1, 0)$, $(0, \pm 2)$

b) $x^2 - 4y - 8 = 0$, $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $(0, -2)$

52) $h_1 = 20m$ e $h_2 = 32{,}5m$

53) a) $(2, 0)$ e $(4, 0)$

b) $(-1, 15)$ e $(7, 15)$

c) $x = t + 3$ e $y = t^2 - 1$

ELIPSE

Definição

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja *soma das distâncias* a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$, e um número real positivo *a* com $2a > 2c$.

Chamando de 2a a constante da definição, um ponto P pertence à elipse (Figura 8.22) se, e somente se,

$$\boxed{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a} \qquad (1)$$

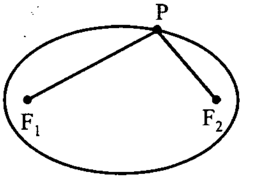


Figura 8.22

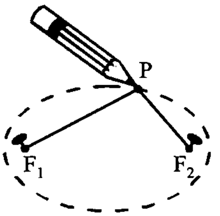


Figura 8.23

Para construir uma elipse no papel, pode-se proceder como sugere a Figura 8.23: fixam-se dois percevejos em pontos arbitrários F_1 e F_2 amarrando-se neles as extremidades de um fio não esticado. Um lápis que deixa o fio distendido marca o ponto P. Se fizermos o lápis deslizar sobre o papel, mantendo o fio sempre distendido, a ponta descreverá a elipse e, portanto, para todo o ponto P da elipse, a soma das distâncias $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ será sempre igual ao comprimento do fio, isto é, um valor constante, que na definição foi denominado 2a.

Se variarmos as posições de F_1 e F_2 mantendo fixo o comprimento do fio, a forma da elipse irá variar. Assim, quanto mais afastados um do outro estiverem os pontos F_1 e F_2, tanto mais "achatada" é a forma da elipse. Por outro lado, se $d(F_1, F_2)$ está próximo de zero, a elipse é quase circular e no caso de $F_1 = F_2$, temos a circunferência de centro F_1 e raio *a*.

Elementos

Com base na Figura 8.24, tem-se:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a (este segmento contém os focos).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

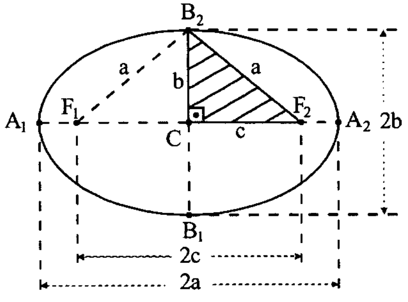


Figura 8.24

Pela Figura 8.24 é imediato que $B_2F_2 = a$ pois $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (definição de elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Logo, do triângulo retângulo B_2CF_2 vem

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (2)$$

Esta igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$.

Excentricidade da elipse é o número real

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

A excentricidade é responsável pela "forma" da elipse: elipses com excentricidade perto de 0 (zero) são aproximadamente circulares, enquanto que elipses com excentricidade próxima de 1 são "achatadas". Por outro lado, fixada uma excentricidade, por exemplo,

$e = \frac{1}{2}$, todas as infinitas elipses com esta excentricidade têm a mesma forma (diferem apenas pelo tamanho).

Observação

A 1º lei do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) é expressa por: "*qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos*". A maioria dos planetas tem órbitas aproximadamente circulares, o que significa dizer que suas excentricidades estão perto de zero. Por exemplo, a órbita da Terra tem excentricidade 0,02, a de Júpiter 0,05, a de Marte 0,09, para citar apenas algumas. Mercúrio e Plutão, cujas órbitas elípticas têm excentricidades bem maiores, 0,21 e 0,25, respectivamente, constituem uma exceção à maioria dos planetas. O "campeão" de excentricidade no sistema solar parece ser o Cometa de Halley com e = 0,967 (quase 1) e ele leva aproximadamente 76 anos (período de revolução) para dar uma volta em torno do Sol. A Figura 8.25 dá uma idéia das trajetórias da Terra e de Halley com o Sol num dos focos.

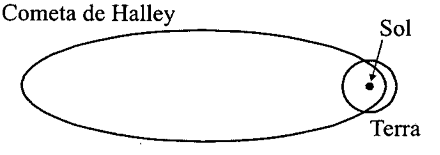


Figura 8.25

Com a finalidade de obtermos uma equação de elipse, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos. Iniciemos pelos casos mais simples.

Equações Reduzidas

Seja a elipse de centro C(0, 0). Consideraremos dois casos:

1º) *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma elipse (Figura 8.26) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Pela definição em (1), tem-se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

ou, em coordenadas

$$|(x + c, y - 0)| + |(x - c, y - 0)| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2$$

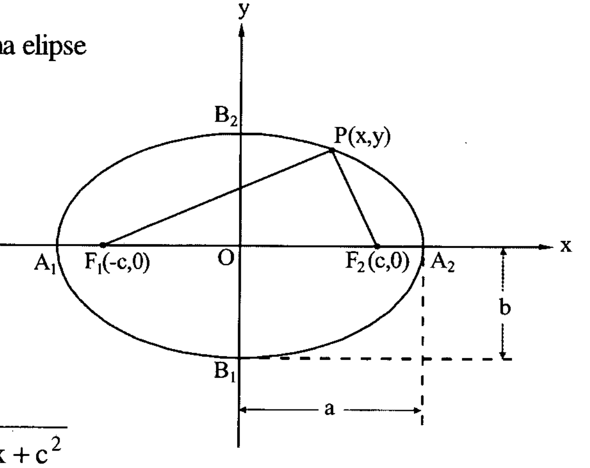


Figura 8.26

$$x^2+y^2+2cx+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} + x^2+y^2-2cx+c^2$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x^2+y^2-2cx+c^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2 = a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como por (2) tem-se $a^2 - c^2 = b^2$, resulta

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, vem

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que é a *equação reduzida* para este caso.

2º) *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

Observando a Figura 8.27, com procedimento análogo ao 1º caso, obteremos a equação reduzida

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

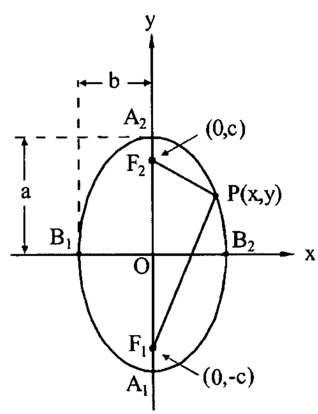


Figura 8.27

Observação

Como em toda elipse tem-se $a > b$ (ou $a^2 > b^2$), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta *observar onde está o maior denominador* (a^2) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de x^2, o eixo maior está sobre Ox. Caso contrário, estará sobre Oy.

Por exemplo, na equação reduzida

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

o maior denominador é 9. Como ele é denominar de y^2, o eixo maior da elipse está sobre o eixo dos y (Figura 8.28). No caso, temos

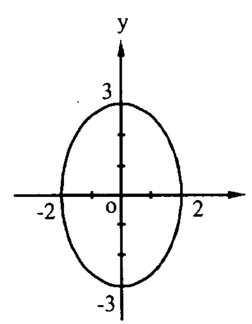


Figura 8.28

$$a^2 = 9 \quad \therefore \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

e, portanto, as interseções com os eixos são os quatro pontos $(0, \pm 3)$ e $(\pm 2, 0)$.

Observemos, por outro lado, que se na equação anterior fizermos x = 0, vem y = ±3 e para y = 0, vem x = ±2, o que confirma as interseções com os eixos em $(0, \pm 3)$ e $(\pm 2, 0)$.

Exemplos

Nos problemas de 1 a 3, para cada uma das elipses, determinar

a) a medida dos semi-eixos;
b) um esboço do gráfico;
c) os focos;
d) a excentricidade.

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Solução

a) Para expressar a equação na forma reduzida, dividimos ambos os membros da equação por 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

ou

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Maior denominador: 25. Logo, $a^2 = 25$ e o eixo maior da elipse está sobre o eixo dos x porque 25 é denominador de x^2.

Então,

$$a^2 = 25 \quad \therefore \quad a = 5$$

$$b^2 = 9 \quad \therefore \quad b = 3$$

b) Gráfico: Figura 8.29

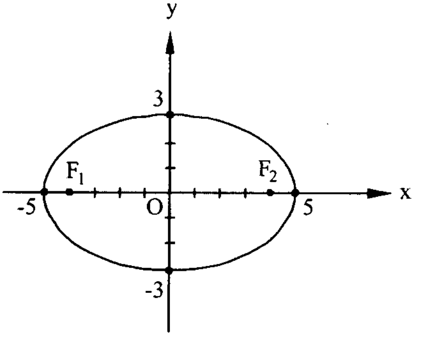


Figura 8.29

c) $a^2 = b^2 + c^2$

$$25 = 9 + c^2$$

$$c^2 = 16 \quad \therefore \quad c = 4$$

Logo, os focos são $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$

d) $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

2) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solução

a) Conduzindo a equação para a forma reduzida, vem

$$4x^2 + y^2 = 16 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Maior denominador: 16 (denominador de y^2)

Logo,

$$a^2 = 16 \quad \therefore \quad a = 4$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

b) Gráfico: Figura 8.30.

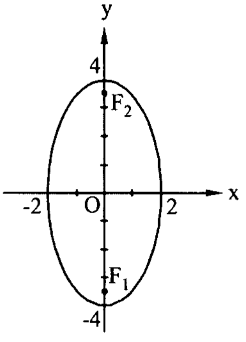


Figura 8.30

c) $a^2 = b^2 + c^2$

$$16 = 4 + c^2$$

$$c^2 = 12 \quad \text{e} \quad c = \sqrt{12}$$

Logo, os focos são $F_1(0, -\sqrt{12})$ e $F_2(0, \sqrt{12})$

d) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solução

a) A forma reduzida desta equação é

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Neste caso, tem-se $a^2 = b^2 = 9$ e, portanto, $a = b = 3$

Trata-se de uma circunferência de raio 3.

b) Gráfico: Figura 8.31.

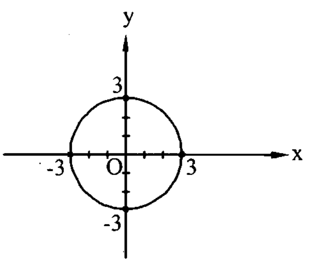


Figura 8.31

c) $a^2 = b^2 + c^2$

$$9 = 9 + c^2$$

$$c = 0$$

Portanto, os dois focos coincidem com o centro da circunferência.

d) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{0}{3} = 0$

A circunferência pode ser considerada uma elipse de excentricidade nula.

4) Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto (3, 0) e a medida do eixo maior é 8. Determinar sua equação.

Solução

Como o foco é ponto do eixo do x, a equação desta elipse é da forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Precisamos determinar a e b. Como o eixo maior mede 8, isto é,

$$2a=8 \quad \therefore \quad a=4$$

Tendo em vista que o centro da elipse é (0, 0) e um dos focos é (3, 0), conclui-se que c = 3.

Mas

$$a^2=b^2+c^2$$

ou

$$16=b^2+9 \quad \therefore \quad b^2=7$$

Logo, a equação procurada é

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Outras Formas da Equação da Elipse

Seja uma elipse de centro $C(h, k) \neq (0, 0)$. Consideraremos somente os casos de os eixos da elipse serem paralelos aos eixos coordenados.

1º) *O eixo maior é paralelo ao eixo dos x*

Utilizando uma conveniente translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ (Figura 8.32) em relação ao qual a elipse tem centro na origem e eixo maior sobre o eixo $O'x'$. Logo, sua equação reduzida é

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1} \tag{3}$$

Para expressá-la em relação ao sistema original xOy, utilizamos as fórmulas de translação

$$x'=x-h \quad e \quad y'=y-k,$$

que substituídas em (3) resulta

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

que é a *forma padrão* para este caso.

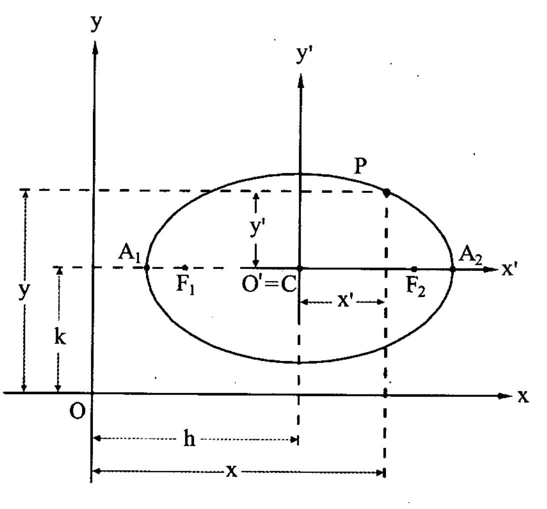


Figura 8.32

2º) *O eixo maior é paralelo ao eixo dos y*

De modo análogo ao 1º caso, temos

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

Uma outra forma da equação da elipse será apresentada no próximo exemplo.

Exemplos

1) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro C(4, -2), excentricidade $e=\frac{1}{2}$ e eixo menor de medida 6. Obter uma equação desta elipse.

Solução

Como o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo dos y, sua equação é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

com h = 4 e k = -2.

Precisamos determinar a e b.

Mas

$$2b=6 \quad \therefore \quad b=3$$

Sendo

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \text{ vem } c=\frac{a}{2}$$

De

$$a^2=b^2+c^2$$

resulta

$$a^2=3^2+(\frac{a}{2})^2$$

ou

$$a^2=9+\frac{a^2}{4}, \text{ donde } a^2=12$$

Logo, a equação da elipse é

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{12}=1$$

Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obteremos outra forma da equação da elipse:

$$4(x^2-8x+16)+3(y^2+4y+4)=36$$

ou

$$4x^2 - 32x + 64 + 3y^2 + 12y + 12 - 36 = 0$$

ou

$$4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$$

que é uma *equação geral* desta elipse.

Assim, qualquer elipse cujos eixos estão sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma *equação geral* que terá a forma

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0}$$

com a e b de mesmo sinal. Em particular, quando a = b esta equação poderá representar uma circunferência.

2) Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, determinar:

a) sua equação reduzida;
b) o centro;
c) o gráfico;
d) os vértices;
e) os focos;
f) a excentricidade.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) = -4$$

ou

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 4 e 9 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então temos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4(1) + 9(4)$$

ou

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

e dividindo ambos os membros por 36, resulta

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \qquad (4)$$

que é a forma padrão da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos x. Utilizando em (4) as fórmulas de translação

$$x' = x - 1 \quad \text{e} \quad y' = y - 2$$

obtemos

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a *equação reduzida* desta elipse.

b) Como a equação (4) é da forma padrão

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

onde h e k são coordenadas do centro, vem imediatamente: C(1, 2).

c) O gráfico: Figura 8.33.

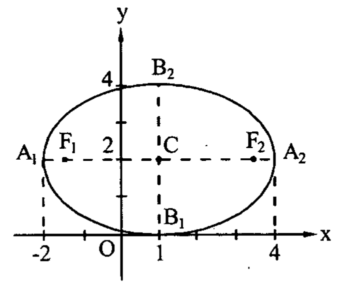


Figura 8.33

d) Confrontando (4) e (5), concluímos:

$a^2=9 \quad \therefore \quad a=3$

$b^2=4 \quad \therefore \quad b=2$

e pelo gráfico tem-se:

$A_1(-2, 2) \quad$ e $\quad A_2(4, 2)$

$B_1(1, 0) \quad$ e $\quad B_2(1, 4)$

e) Para determinar os focos precisamos do valor de c.

De $a^2=b^2+c^2$

ou $9=4+c^2$, vem $c=\sqrt{5}$ e, portanto, os focos são:

$F_1(1-\sqrt{5}, 2) \quad$ e $\quad F_2(1+\sqrt{5}, 2)$

f) Excentricidade: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Equações Paramétricas

Consideremos a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tracemos a circunferência de centro O e raio igual ao semi-eixo maior *a* da elipse (Figura 8.34).

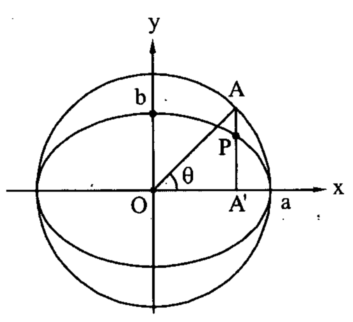


Figura 8.34

Seja P(x,y) um ponto qualquer desta elipse. A reta que passa por P e é paralela ao eixo dos y, intercepta a circunferência em A e o raio AO determina com o eixo dos x um ângulo θ.

Do triângulo A'OA vem

$$OA'=OA.\cos\theta$$

ou

$$x=a\cos\theta$$

Como x é abscissa de um ponto da elipse, a ordenada y do mesmo ponto é calculada substituindo o valor de x na equação da elipse:

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta.$$

e

$$y=b\operatorname{sen}\theta$$

Observemos que, para cada valor de θ corresponde um e um só ponto P da elipse e, quando θ varia de 0 a 2π, o ponto P parte de (a, 0) e "descreve" a elipse no sentido anti-horário. Então, θ é o parâmetro e o sistema

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi \qquad (6)$$

constitui *equações paramétricas* dessa elipse.

Observações

a) Das equações (6) vem $\frac{x}{a}=\cos\theta$ e $\frac{y}{b}=\operatorname{sen}\theta$ e, portanto, $\frac{x^2}{a^2}=\cos^2\theta$ e $\frac{y^2}{b^2}=\operatorname{sen}^2\theta$.

Somando membro a membro, resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)$$

que é a equação da elipse dada inicialmente.

b) No caso da elipse ser $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (eixo maior sobre Oy), suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x=b\cos\theta \\ y=a\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

c) Quando o centro da elipse for C(h, k), pela translação de eixos obtemos

$$\begin{cases} x-h=a\cos\theta \\ y-k=b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo a Ox)}$$

e

$$\begin{cases} x=h+b\cos\theta \\ y=k+a\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo a Oy)}$$

d) O sistema de equações

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} \theta \\ y = b \cos \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

descreve de outra forma a mesma elipse dada pelo sistema (6), porém, neste caso o ponto P parte de (0,b) e "descreve" a elipse no sentido horário.

Exemplos

Obter equações paramétricas da elipse de equação:

1) $16x^2 + 25y^2 = 400$

2) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$

Solução

1) A forma reduzida de equação $16x^2 + 25y^2 = 400$ é

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

e, portanto, a = 5 e b = 4. Logo,

$$\begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

são equações paramétricas desta elipse.

2) A forma padrão de $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$ é

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \text{ (a cargo do leitor)}$$

e, portanto, o centro da elipse é (3, -2), sendo a = 3 e b = 2.

Logo,

$$\begin{cases} x = 3 + 2 \cos \theta \\ y = -2 + 3 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \qquad (7)$$

são equações paramétricas desta elipse.

Por outro lado, das equações (7) vem

$$\frac{x-3}{2} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{y+2}{3} = \operatorname{sen} \theta$$

Elevando ao quadrado ambos os membros das duas equações, temos

$$\frac{(x-3)^2}{4} = \cos^2 \theta \quad \text{e} \quad \frac{(y+2)^2}{9} = \operatorname{sen}^2 \theta$$

Somando membro a membro resulta

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1 \quad (1=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)$$

que é a equação da elipse na forma padrão dada anteriormente.

Problemas Propostos

Em cada um dos problemas de 1 a 10, esboçar o gráfico e determinar os vértices A_1 *e* A_2, *os focos e a excentricidade das elipses dadas.*

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

2) $25x^2+4y^2=100$

3) $9x^2+16y^2-144=0$

4) $9x^2+5y^2-45=0$

5) $x^2+25y^2=25$

6) $4x^2+9y^2=25$

7) $4x^2+y^2=1$

8) $4x^2+25y^2=1$

9) $x^2+2y^2-5=0$

10) $9x^2+25y^2=25$

11) Esboçar o gráfico de uma elipse de excentricidade

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{5}$

Em cada um dos problemas de 12 a 19, determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas. Esboçar o gráfico.

12) focos $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4,0)$, eixo maior igual a 10;

13) focos $F_1(0,-5)$ e $F_2(0,5)$, eixo menor igual a 10;

14) focos $F(\pm 3, 0)$ e vértices $A(\pm 4, 0)$;

15) focos $F(0, \pm 3)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

16) vértices $A(\pm 10, 0)$ e excentricidade $\frac{1}{2}$;

17) centro $C(0, 0)$, eixo menor igual a 6, focos no eixo dos x e passando pelo ponto $(-2\sqrt{5}, 2)$;

18) vértices $A(0, \pm 6)$ e passando por $P(3, 2)$;

19) centro $C(0, 0)$, focos no eixo dos x, $e=\frac{2}{3}$ e passando por $P(2, -\frac{5}{3})$.

Em cada um dos problemas de 20 a 27, obter uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas.

20) centro $C(1, 4)$, um foco $F(5, 4)$ e excentricidade $\frac{2}{3}$;

21) eixo maior igual a 10 e focos $F_1(2, -1)$ e $F_2(2, 5)$;

22) focos $F_1(-1, -3)$ e $F_2(-1, 5)$ e excentricidade $\frac{2}{3}$;

23) focos $F_1(-3, 2)$ e $F_2(3, 2)$ e excentricidade $\frac{1}{2}$;

24) vértices $A_1(-7, 2)$ e $A_2(-1, 2)$ e eixo menor igual a 2;

25) centro C(0,1), um vértice A(0,3) e excentricidade $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

26) centro C(-3, 0), um foco F(-1, 0) e tangente ao eixo dos y;

27) centro C(2, -1), tangente aos eixos coordenados e eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados.

Em cada um dos problemas de 28 a 33, determinar a equação reduzida, o centro, os vértices A_1 *e* A_2, *os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.*

28) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$

29) $25x^2+16y^2+50x+64y-311=0$

30) $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$

31) $16x^2+y^2+64x-4y+52=0$

32) $16x^2+9y^2-96x+72y+144=0$

33) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

Nos problemas de 34 a 39, obter equações paramétricas da elipse de equação dada.

34) $x^2+4y^2=4$

35) $x^2+y^2=36$

36) $9x^2+16y^2=1$

37) $9(x-1)^2+25(y+1)^2=225$

38) $49(x+7)^2+y^2=7$

39) $4x^2+9y^2-54y+45=0$

Nos problemas de 40 a 43, obter uma equação geral da elipse dada por equações paramétricas.

40) $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 5\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

41) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 3\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

42) $\begin{cases} x = 2+4\cos\theta \\ y = 3+2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

43) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = -1+\text{sen}\,\theta \end{cases}$

44) Determinar os focos da elipse de equações $x = 4+3\cos t$ e $y = -2+5\,\text{sen}\,t$.

45) Determinar uma equação da curva gerada por um ponto que se move, de modo que a soma de suas distâncias aos pontos (4, -1) e (4, 7) seja sempre 12.

46) Determinar uma equação da curva gerada por um ponto que se move, de modo que sua distância ao ponto A(3, -2) seja igual à metade de sua distância à reta y -2 = 0.

47) Determinar uma equação da elipse de centro (0, 0), eixo maior sobre o eixo dos y, sabendo que passa pelos pontos $P(1, \sqrt{14})$ e $Q(2, -2\sqrt{2})$.

48) Encontrar uma equação da elipse de centro (0, 0), eixo maior sobre Ox, excentricidade $\frac{1}{2}$ e que passa pelo ponto (2, 3).

49) Determinar uma equação das circunferências inscrita e circunscrita à elipse de equação dada.

a) $16x^2 + y^2 - 16 = 0$

b) $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0$

50) Um satélite de órbita elíptica e excentricidade $\frac{1}{3}$ viaja ao redor de um planeta situado num dos focos da elipse. Sabendo que a distância mais próxima do satélite ao planeta é de 300 km, calcular a maior distância.

Respostas de Problemas Propostos

1) $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm\sqrt{21}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

2) $A(0, \pm 5)$, $F(0, \pm\sqrt{21})$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

3) $A(\pm 4, 0)$, $F(\pm\sqrt{7}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

4) $A(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{2}{3}$

5) $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

6) $A(\pm\frac{5}{2}, 0)$, $F(\pm\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

7) $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

8) $A(\pm\frac{1}{2}, 0)$, $F(\pm\frac{\sqrt{21}}{10}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$

9) $A(\pm\sqrt{5}, 0)$, $F(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $A(\pm\frac{5}{3}, 0)$, $F(\pm\frac{4}{3}, 0)$, $e = \frac{4}{5}$

11) a) Existem infinitas, todas elas com $a = 2c$ e $b = c\sqrt{3}$

12) $9x^2 + 25y^2 = 225$

13) $2x^2 + y^2 - 50 = 0$

14) $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$

15) $4x^2 + y^2 - 12 = 0$

16) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

17) $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

18) $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

19) $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$

20) $5x^2+9y^2-10x-72y-31=0$

21) $25x^2+16y^2-100x-64y-236=0$

22) $9x^2+5y^2+18x-10y-166=0$

23) $3x^2+4y^2-16y-92=0$

24) $x^2+9y^2+8x-36y+43=0$

25) $4x^2+y^2-2y-3=0$

26) $5x^2+9y^2+30x=0$

27) $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$

28) $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$, $C(2,-3)$, $A_1(-2,-3)$, $A_2(6,-3)$, $F(2\pm\sqrt{7},-3)$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

29) $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{25}=1$, $C(-1,-2)$, $A_1(-1,-7)$, $A_2(-1,3)$, $F_1(-1,-5)$, $F_2(-1,1)$, $e=\frac{3}{5}$

30) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $C(3,-1)$, $A_1(6,-1)$, $A_2(0,-1)$, $F(3\pm\sqrt{5},-1)$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

31) $x'^2+\frac{y'^2}{16}=1$, $C(-2,2)$, $A_1(-2,-2)$, $A_2(-2,6)$, $F(-2,2\pm\sqrt{15})$, $e=\frac{\sqrt{15}}{4}$

32) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{16}=1$, $C(3,-4)$, $A_1(3,-8)$, $A_2(3,0)$, $F(3,-4\pm\sqrt{7})$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

33) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $C(1,2)$, $A_1(-2,2)$, $A_2(4,2)$, $F(1\pm\sqrt{5},2)$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

34) $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\text{sen}\,\theta \end{cases}$

35) $\begin{cases} x=6\cos\theta \\ y=6\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

36) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\cos\theta \\ y=\frac{1}{4}\text{sen}\,\theta \end{cases}$

37) $\begin{cases} x=1+5\cos\theta \\ y=-1+3\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

38 $\begin{cases} x=-7+\frac{\sqrt{7}}{7}\cos\theta \\ y=\sqrt{7}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

39) $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=3+2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

40) $x^2+y^2-25=0$

41) $9x^2+y^2-9=0$

42) $x^2+4y^2-4x-24y+24=0$

43) $x^2+2y^2+4y=0$

44) $(4, 2)$ e $(4, -6)$

45) $9x^2+5y^2-72x-30y+9=0$

46) $4x^2+3y^2-24x+20y+48=0$

47) $2x^2+y^2=16$

48) $3x^2+4y^2=48$

49) a) $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=16$

b) $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ e $x^2+y^2-8x+4y+11=0$

50) 600 km

HIPÉRBOLE

Definição

Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja *diferença das distâncias*, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real positivo a de modo que $2a < 2c$.

Chamando de 2a a constante da definição, um ponto P pertence à hipérbole (Figura 8.35) se, e somente se,

$$\boxed{|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a} \qquad (1)$$

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação (1), um ponto P está na hipérbole se, e somente se,

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$$

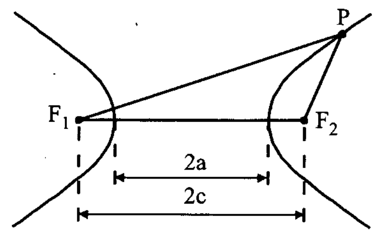


Figura 8.35

Para possibilitar um traçado bem melhor da hipérbole e tecermos considerações a respeito de seus elementos, faremos a construção da Figura 8.36 a seguir explanada.

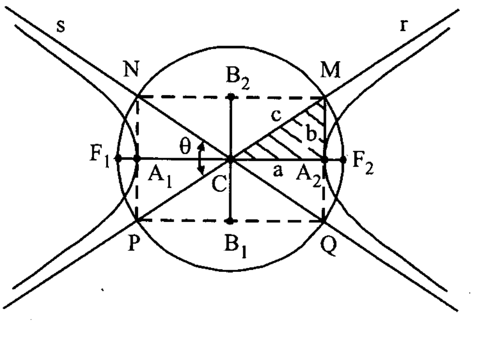


Figura 8.36

Consideremos no plano dois pontos quaisquer F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$. Chamando de C o ponto médio do segmento F_1F_2, tracemos uma circunferência de centro C e raio c.

Tomemos um valor arbitrário a, $a < c$, e marquemos sobre $F_1 F_2$, a partir de C, os pontos A_1 e A_2 tais que $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$. Por estes pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro $F_1 F_2$. As quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo MNPQ inscrito nesta circunferência. Tracemos as retas *r* e *s* que contêm as diagonais do referido retângulo e, por fim, a hipérbole conforme a figura.

Com base nesta figura temos os elementos da hipérbole.

Elementos

Focos: são os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento $F_1 F_2$.

Vértices: são os pontos A_1 e A_2.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a.

Observemos que os pontos A_1 e A_2 são pontos da hipérbole porque satisfazem a definição (1). Na verdade, para A_1, tem-se

$$d(A_1,F_1) = c - a \qquad \text{e} \qquad d(A_1,F_2) = a + c$$

e

$$|d(A_1,F_1) - d(A_1,F_2)| = |-2a| = 2a.$$

Eixo imaginário ou não-transverso: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b, com $B_1B_2 \perp A_1A_2$ em C.

Observemos que o retângulo MNPQ tem dimensões 2a e 2b, sendo *a* a medida do semi-eixo real e *b* a medida do semi-eixo imaginário. Ainda, do triângulo $C\,A_2\,M$ obtemos a relação

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

de larga aplicação nos problemas de hipérbole.

Assíntotas: são as retas *r* e *s*.

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices. Esta aproximação é "contínua" e "lenta" de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Naturalmente, esta particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

Com o que já vimos na construção da hipérbole, esta fica determinada quando se conhece o centro C e os valores a e b (ou a e c ou b e c). De fato, a partir destes elementos, constrói-se o retângulo MNPQ e, conseqüentemente, as assíntotas *r* e *s*, e daí, os dois ramos da hipérbole.

O ângulo θ assinalado na figura é chamado *abertura* da hipérbole.

Chama-se *excentricidade* da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a}$$

e por ser c > a, tem-se e > 1.

A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com a sua abertura.

De fato: se na Figura 8.36 tivéssemos tomado um valor para "a" menor do que o anterior, o novo retângulo MNPQ seria mais "estreito" e, em conseqüência, a abertura θ seria maior.

Ora, diminuir o valor de "a" (mantendo c fixo) signifca aumentar o valor de $e = \frac{c}{a}$.

Assim, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura, ou seja, mais "abertos" estarão os ramos da hipérbole.

Quando a = b, o retângulo MNPQ se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares (θ = 90°). A hipérbole, neste caso é denominada "*hipérbole eqüilátera*".

Equações reduzidas

Seja a hipérbole de centro C(0, 0). Consideraremos dois casos:

1º) *O eixo real está sobre o eixo dos x.*

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma hipérbole (Figura 8.37) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Pela definição em (1), tem-se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou, em coordenadas

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

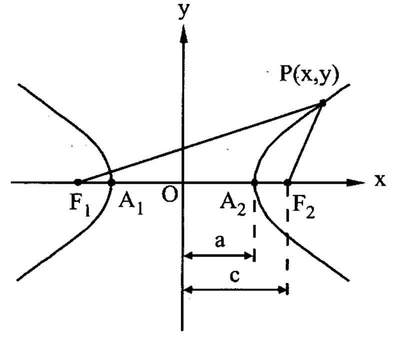


Figura 8.37

Com procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegamos à equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que é a *equação reduzida* para este caso.

2°) *O eixo real está sobre o eixo dos y*

Observando a Figura 8.38, com procedimento análogo ao 1° caso, obtemos a equação reduzida

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

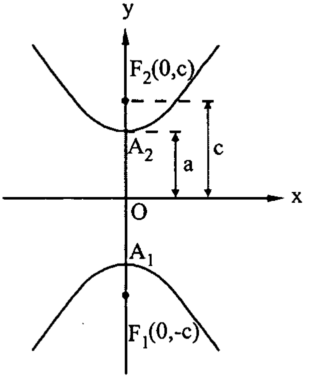


Figura 8.38

Exemplo

A partir de um caso particular, serão feitas algumas observações. Seja a hipérbole da Figura 8.39.

Sua equação reduzida é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad (2)$$

onde $a^2 = 3^2 = 9$ e

$b^2 = 2^2 = 4$

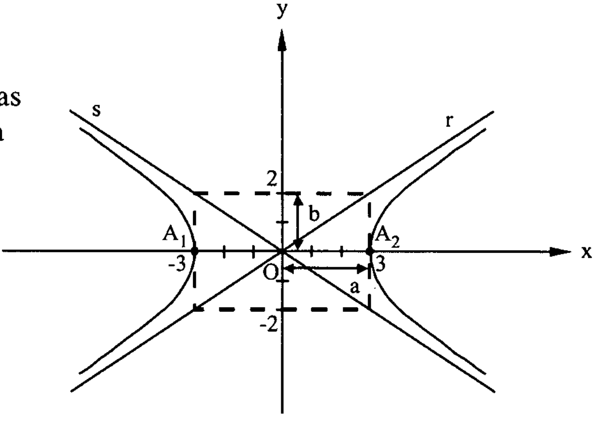


Figura 8.39

Observações

a) É imediato que os vértices são $A_1(-3, 0)$ e $A_2(3, 0)$. Estes também seriam obtidos fazendo y = 0 na equação (2), donde resulta $\frac{x^2}{9} = 1$ ou $x = \pm 3$, que são as abscissas dos vértices.

Por outro lado, se na equação (2) fizermos x = 0, obteremos $-\frac{y^2}{4} = 1$ ou $y^2 = -4$, que é uma equação impossível no conjunto dos reais. Isto signifca que a hipérbole não corta o eixo dos y.

b) Como a equação apresenta somente potências pares de x e y, a hipérbole é simétrica em relação ao eixos coordenados e em relação à origem.

Por exemplo, o ponto $P_1(6, \sqrt{12})$ pertence a esta hipérbole por ser verdadeira a afirmação

$$\frac{6^2}{9} - \frac{(\sqrt{12})^2}{4} = 1 \qquad \text{ou} \qquad 4 - 3 = 1$$

e, da mesma forma, também pertencem os pontos $P_2(6, -\sqrt{12})$ (simétrico de P_1 em relação a Ox), $P_3(-6, \sqrt{12})$ (simétrico de P_1 em relação a Oy) e $P_4(-6, -\sqrt{12})$ (simétrico de P_1 em relação à origem).

c) As assíntotas *r* e *s* são retas que passam pelo centro da hipérbole, no caso, a origem do sistema. Logo, suas equações são do tipo

$y = mx$, sendo *m* a declividade.

A assíntota *r* tem declividade $m_1 = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$

e a assíntota *s* tem declividade $m_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$

Portanto, as assíntotas têm equações

$$y = \frac{2}{3}x \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{2}{3}x$$

Quando a equação da hipérbole é da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, as declividades das assíntotas serão $m = \pm\frac{a}{b}$.

Exemplos

Nos problemas 1 e 2, determinar, para cada uma das hipérboles:

a) a medida dos semi-eixos;
b) um esboço do gráfico;
c) os vértices;
d) os focos;
e) a excentricidade;
f) as equações das assíntotas;

1) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

Solução

a) Passando esta equação para forma reduzida, obtém-se

$$x^2 - 4y^2 = -16 \text{ ou } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

que representa uma hipérbole com eixo real sobre Oy.

Então, $a^2 = 4 \quad \therefore \quad a = 2$

$b^2 = 16 \quad \therefore \quad b = 4$

b) O gráfico com assíntotas: Figura 8.40.

c) Vértices: $A_1(0, -2)$ e $A_2(0, 2)$ ou $A(0, \pm 2)$.

d) Para determinar os focos, precisamos do valor de c:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4 + 16$$
$$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Focos: $F_1(0, -2\sqrt{5})$ e $F_2(0, 2\sqrt{5})$.

e) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

f) Assíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ (pois $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$)

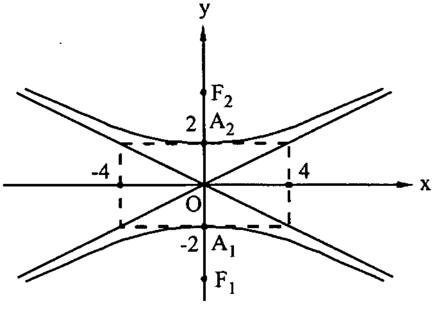


Figura 8.40

2) $x^2 - y^2 = 4$

Solução

a) Passando para a forma reduzida, obtém-se

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

que representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.

Então, $a^2 = b^2 = 4 \quad \therefore \quad a = b = 2$ (hipérbole eqüilátera)

b) O gráfico com assíntotas: Figura 8.41.

c) Vértices: $A_1(-2, 0)$ e $A_2(2, 0)$

d) $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 4 + 4$$
$$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Focos: $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{2}, 0)$.

e) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

f) Assíntotas: $y = \pm x$ (pois $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{2} = 1$)

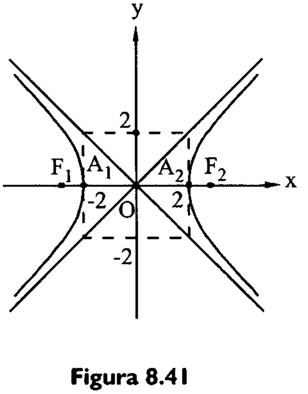


Figura 8.41

Observemos que, em toda hipérbole eqüilátera, a excentricidade é sempre igual a $\sqrt{2}$ e as equações das assíntotas são sempre iguais a $y = \pm x$.

3) Uma hipérbole tem focos em $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$ e a medida do eixo real é 6. Determinar sua equação reduzida.

Solução

Tendo em vista que os focos são pontos do eixo dos x, a equação desta hipérbole é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

na qual precisamos determinar a e b.

De $F(\pm 5, 0)$, vem $c = 5$ (distância de cada foco ao centro).

O eixo real mede 6, isto é $2a = 6$. Logo, $a = 3$.

De $c^2 = a^2 + b^2$ ou $25 = 9 + b^2$, vem $b^2 = 16$.

Portanto, a equação procurada é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Outras Formas da Equação da Hipérbole

Seja uma hipérbole de centro $C(h, k) \neq (0, 0)$. Consideraremos somente os casos de os eixos da hipérbole serem paralelos aos eixos coordenados.

1°) *O eixo real é paralelo ao eixo dos x*

Com procedimento análogo ao que foi visto para a elipse, resulta a equação

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

que é a *forma padrão* para este caso (Figura 8.42).

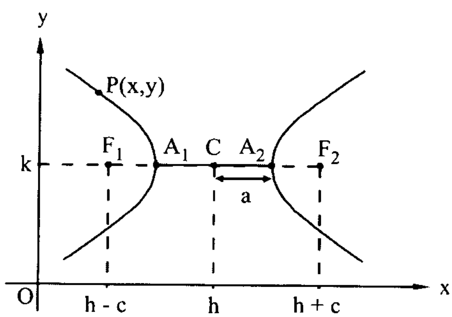


Figura 8.42

2°) *O eixo real é paralelo ao eixo dos y*

De igual modo ao 1° caso, temos

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

Exemplos

1) Determinar uma equação da hipérbole de vértices $A_1(1, -2)$ e $A_2(5, -2)$, sabendo que $F(6, -2)$ é um de seus focos.

Solução

Em função dos dados do problema, esboçamos o gráfico desta hipérbole (Figura 8.43)

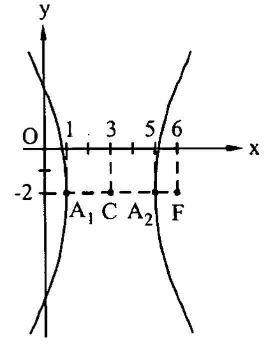


Figura 8.43

Sendo o eixo real A_1A_2 paralelo a Ox, a equação da hipérbole é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

O centro é o ponto médio de A_1A_2 : C(3, -2).

É imediato que: $a = d(C, A_1) = 2$ e $c = d(C, F) = 3$.

Da relação $c^2 = a^2 + b^2$ ou $9 = 4 + b^2$, vem $b^2 = 5$.

Logo, uma equação da hipérbole é

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Eliminando os denominadores, desenvolvendo os quadrados e ordenando os termos, encontramos

$$5(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = 20$$

$$5x^2 - 30x + 45 - 4y^2 - 16y - 16 - 20 = 0$$

$$5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$$

que é uma *equação geral* desta hipérbole.

Assim, qualquer hipérbole cujos eixos estejam sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma *equação geral* que terá a forma

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

com *a* e *b* de sinais contrários.

2) Dada a hipérbole de equação $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$, determinar
   a) sua equação reduzida;
   b) o centro;
   c) um esboço do gráfico;
   d) os vértices;
   e) os focos;
   f) a excentricidade.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$(9x^2 - 54x) - (4y^2 - 8y) = -113$$

ou

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 9 e 4 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então, temos

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 9(9) - 4(1)$$

ou

$$9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

e dividindo ambos os membros por -36, resulta

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1 \qquad (3)$$

que é a forma padrão da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo dos y. Utilizando em (3) as fórmulas de translação

$$x' = x - 3 \text{ e } y' = y - 1$$

teremos

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

que é a *equação reduzida* desta hipérbole.

b) Como a equação (3) é da forma padrão

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

onde h e k são as coordenadas do centro, vem imediatamente: C(3, 1).

c) Um esboço do gráfico: Figura 8.44.

d) Confrontando (3) e (4), concluímos:

$$a^2 = 9 \quad \therefore \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

e pelo gráfico tem-se:

$$A_1(3, -2) \text{ e } A_2(3, 4)$$

e) Para determinar os focos precisamos do valor de c.

Da relação

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ou } c^2 = 9 + 4$$

vem $c = \sqrt{13}$ e, portanto, os focos são

$$F_1(3, 1 - \sqrt{13}) \text{ e } F_2(3, 1 + \sqrt{13})$$

f) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

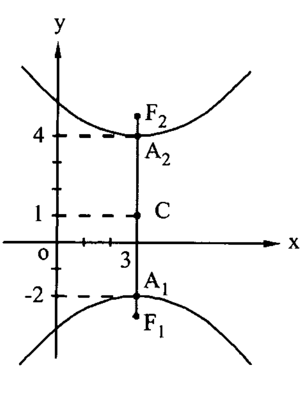


Figura 8.44

Equações Paramétricas

Consideremos a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Escrevendo esta equação como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad (5)$$

significa dizer que $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são números reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Se na identidade

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

dividirmos ambos os membros por $\cos^2\theta \neq 0$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ou

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ e $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, vem

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

Portanto, confrontando esta equação com a equação da hipérbole em (5), podemos fazer

$$\frac{x}{a} = \sec\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{b} = \tan\theta$$

e daí concluir que para o parâmetro $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, excluídos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, o sistema

$$\boxed{\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}}$$

constitui *equações paramétricas* dessa hipérbole.

Quando θ percorre o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ será descrito o ramo direito da hipérbole ($x \geq a$) e quando percorre o intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, o ramo esquerdo ($x \leq -a$).

Observações

a) No caso da hipérbole ser $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (eixo real sobre Oy), suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b\tan\theta \\ y = a\sec\theta \end{cases}$$

b) Quando o centro da hipérbole for C(h, k), aplicando a translação de eixos, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = h + a\sec\theta \\ y = k + b\tan\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = h + b\tan\theta \\ y = k + a\sec\theta \end{cases}$$

conforme o eixo real seja paralelo a Ox ou Oy, respectivamente.

Exemplos

Obter equações paramétricas da hipérbole de equação:

1) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

2) $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 13 = 0$

Solução

1) A forma reduzida da equação $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

e, portanto, a = 3 e b = 2. Logo,

$$\begin{cases} x = 3\sec\theta \\ y = 2\tan\theta \end{cases}$$

são equações paramétricas desta hipérbole.

A Figura 8.45 apenas indica pontos da tabela para alguns ângulos no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

θ	Ponto
0	$(3, 0)$
$\frac{\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, 2)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(3\sqrt{2}, -2)$
$\frac{\pi}{3}$	$(6, 2\sqrt{3})$
$-\frac{\pi}{3}$	$(6, -2\sqrt{3})$

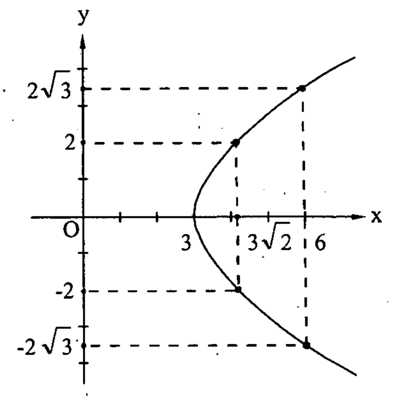


Figura 8.45

2) A forma padrão de $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 13 = 0$ é

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1 \text{ (a cargo do leitor)}$$

e, portanto, o centro da hipérbole é (-4, 2), sendo a = 3 e $b = \sqrt{3}$

Logo,

$$\begin{cases} x = -4 + 3\sec\theta \\ y = 2 + \sqrt{3}\tan\theta \end{cases}$$

são equações paramétricas desta hipérbole.

Problemas Propostos

Em cada um dos problemas de 1 a 12, esboçar o gráfico e determinar os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas.

1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
2) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
3) $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$
4) $9x^2 - 16y^2 = 144$
5) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$
6) $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$
7) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$
8) $x^2 - y^2 = 1$
9) $y^2 - x^2 = 2$
10) $y^2 - 4x^2 = 1$
11) $x^2 - 9y^2 = 1$
12) $2y^2 - 4x^2 = 1$
13) Esboçar o gráfico de uma hipérbole (com suas assíntotas) de centro (0, 0), eixo real sobre Ox e excentricidade

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2

Em cada um dos problemas de 14 a 37, determinar uma equação da hipérbole que satisfaça as condições dadas. Esboçar o gráfico.

14) focos $F(\pm 5,0)$, vértices $A(\pm 3,0)$;
15) focos $F(0, \pm 3)$, vértices $A(0, \pm 2)$;
16) focos $F(0, \pm 4)$, eixo real de medida 2;
17) focos $F(\pm 8, 0)$, excentricidade $\frac{4}{3}$;
18) vértices $A(0, \pm 5)$, excentricidade 2;
19) vértices $A(0, \pm 2)$, distância focal $2\sqrt{11}$;
20) focos $F(\pm 4, 0)$ e que seja hipérbole eqüilátera;
21) focos $F(\pm 5, 0)$, eixo imaginário medindo 4;
22) centro $C(0, 0)$, eixo real sobre Oy, $b = 8$, excentricidade $\frac{5}{3}$;
23) vértices $A(\pm 4, 0)$ e passando por $P(8,2)$;
24) vértices $A(\pm 3, 0)$ e equações das assíntotas $y = \pm 2x$;
25) vértices $A(0, \pm 2)$ e equações das assíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$;
26) focos $F(\pm 3, 0)$ e equações das assíntotas $y = \pm x$;
27) centro $C(3, 2)$, um vértice $A(1,2)$ e um foco $F(-1, 2)$;
28) vértices em $(3, -2)$ e $(5, -2)$ e um foco em $(7, -2)$;
29) vértices em $(2, -4)$ e $(2, 0)$ e um foco em $(2, -2+\sqrt{13})$;
30) vértices em $(5, -1)$ e $(5, 5)$ e excentricidade 2;
31) focos $F_1(3, -2)$ e $F_2(3, 4)$ e excentricidade 2;
32) focos $F_1(-6, 1)$ e $F_2(0, 1)$ e eixo real medindo 4;
33) centro $C(5, 1)$, um foco $F(9, 1)$ e eixo imaginário medindo $4\sqrt{2}$;
34) vértices $A_1(-3, -4)$ e $A_2(-3, 4)$ e que seja hipérbole eqüilátera;
35) focos $F_1(-1, -5)$ e $F_2(5, -5)$ e que seja hipérbole eqüilátera;
36) centro $C(2, -3)$, eixo real paralelo a Oy e passando por $(3, -1)$ e $(-1, 0)$;
37) centro $C(-2,1)$, eixo real paralelo a Ox e passando por $(0, 2)$ e $(-5, 6)$.

Em cada um dos problemas 38 a 43, determinar a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

38) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$
39) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$
40) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
41) $4x^2 - y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$
42) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$
43) $25x^2 - 4y^2 + 40y = 0$

Nos problemas de 44 a 49, obter equações paramétricas da hipérbole de equação dada.

44) $x^2 - 4y^2 = 4$

45) $3y^2 - x^2 - 9 = 0$

46) $x^2 - y^2 = 1$

47) $9x^2 - 16y^2 + 1 = 0$

48) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y - 241 = 0$

49) $3x^2 - y^2 + 18x + 18 = 0$

Nos problemas 50 a 53, obter uma equação geral da hipérbole dada por equações paramétricas. Esboçar o gráfico.

50) $\begin{cases} x = 4\sec\theta \\ y = 2\tan\theta \end{cases}$

51) $\begin{cases} x = \tan\theta \\ y = 3\sec\theta \end{cases}$

52) $\begin{cases} x = 2 + 3\tan\theta \\ y = 1 + 4\sec\theta \end{cases}$

53) $\begin{cases} x = 2\sec\theta \\ y = 4 + \sqrt{3}\tan\theta \end{cases}$

54) Determinar os focos da hipérbole de equações $x = 4 + \sqrt{5}\tan\theta$ e $y = -5 + 2\sec\theta$.

55) Encontrar uma equação de hipérbole com focos nos vértices da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e vértices nos focos dessa elipse.

56) Encontrar uma equação da elipse com focos nos vértices da hipérbole $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ e vértices nos focos dessa hipérbole.

57) Encontrar uma equação da hipérbole de excentricidade 2 e focos coincidentes com os focos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

58) Determinar uma equação da curva descrita por um ponto que se move, de modo que sua distância ao ponto A(-1, 3) seja
   a) igual a sua distância à reta x = 3;
   b) a metade de sua distância à reta x = 3;
   c) o dobro de sua distância à reta x = 3.

Respostas de Problemas Propostos

1) $A(\pm 2, 0)$, $F(\pm\sqrt{13}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $y = \pm\frac{3}{2}x$

2) $A(0, \pm 2)$, $F(0, \pm\sqrt{13})$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $y = \pm\frac{2}{3}x$

3) $A(\pm 5, 0)$, $F(\pm\sqrt{41}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$, $y = \pm\frac{4}{5}x$

4) $A(\pm 4, 0)$, $F(\pm 5, 0)$, $e = \frac{5}{4}$, $y = \pm\frac{3}{4}x$

5) $A(0, \pm 2)$, $F(0, \pm 3)$, $e = \frac{3}{2}$, $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$

6) $A(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

7) $A(0, \pm 2)$, $F(0, \pm 2\sqrt{5})$, $e = \sqrt{5}$, $y = \pm\frac{1}{2}x$

8) $A(\pm 1, 0)$, $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}$, $y = \pm x$

9) $A(0, \pm\sqrt{2},)$, $F(0, \pm 2)$, $e = \sqrt{2}$, $y = \pm x$

10) $A(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{5}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $y = \pm 2x$

11) $A(\pm 1, 0)$, $F(\pm\frac{\sqrt{10}}{3}, 0)$, $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $y = \pm\frac{1}{3}x$

12) $A(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \pm\sqrt{2}x$

14) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

15) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

16) $15y^2 - x^2 - 15 = 0$

17) $7x^2 - 9y^2 - 252 = 0$

18) $x^2 - 3y^2 + 75 = 0$

19) $4x^2 - 7y^2 + 28 = 0$

20) $x^2 - y^2 = 8$

21) $4x^2 - 21y^2 = 84$

22) $16y^2 - 9x^2 - 576 = 0$

23) $x^2 - 12y^2 - 16 = 0$

24) $4x^2 - y^2 - 36 = 0$

25) $16y^2 - x^2 = 64$

26) $2x^2 - 2y^2 = 9$

27) $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 11 = 0$

28) $8x^2 - y^2 - 64x - 4y + 116 = 0$

29) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$

30) $x^2 - 3y^2 - 10x + 12y + 40 = 0$

31) $12y^2 - 4x^2 - 24y + 24x - 51 = 0$

32) $5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$

33) $x^2 - y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$

34) $x^2 - y^2 + 6x + 25 = 0$

35) $2x^2 - 2y^2 - 8x - 20y - 51 = 0$

36) $5x^2 - 8y^2 - 20x - 48y - 25 = 0$

37) $24x^2 - 5y^2 + 96x + 10y = 0$

38) $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $C(1, -2)$, $A_1(-1, -2)$, $A_2(3, -2)$, $F(1 \pm \sqrt{13}, -2)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$
$3x - 2y - 7 = 0$ e $3x + 2y + 1 = 0$

39) $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 1$, C(-3, 3), $A_1(-5, 3)$, $A_2(-1, 3)$, $F(-3 \pm \sqrt{5}, 3)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$
$x - 2y + 9 = 0$ e $x + 2y - 3 = 0$

40) $\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$, C(3, 1), $A_1(3, -2)$, $A_2(3, 4)$, $F(3, 1 \pm \sqrt{13})$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$
$3x - 2y - 7 = 0$ e $3x + 2y - 11 = 0$

41) $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{36} = 1$, C(4, 2), $A_1(1, 2)$, $A_2(7, 2)$, $F(4 \pm 3\sqrt{5}, 2)$, $e = \sqrt{5}$
$2x - y - 6 = 0$ e $2x + y - 10 = 0$

42) $\frac{y'^2}{16} - \frac{x'^2}{9} = 1$, C(2, -1), $A_1(2, -5)$, $A_2(2, 3)$, $F_1(2, -6)$, $F_2(2, 4)$ $e = \frac{5}{4}$
$4x - 3y - 11 = 0$ e $4x + 3y - 5 = 0$

43) $\frac{y'^2}{25} - \frac{x'^2}{4} = 1$, C(0, 5), $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 10)$, $F(0, 5 + \sqrt{29})$, $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$
$5x - 2y + 10 = 0$ e $5x + 2y - 10 = 0$

44) $\begin{cases} x = 2\sec\theta \\ y = \tan\theta \end{cases}$

45) $\begin{cases} x = 3\tan\theta \\ y = \sqrt{3}\sec\theta \end{cases}$

46) $\begin{cases} x = \sec\theta \\ y = \tan\theta \end{cases}$

47) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\tan\theta \\ y = \frac{1}{4}\sec\theta \end{cases}$

48) $\begin{cases} x = 1 + 5\sec\theta \\ y = -1 + 3\tan\theta \end{cases}$

49) $\begin{cases} x = -3 + \sqrt{3}\sec\theta \\ y = 3\tan\theta \end{cases}$

50) $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$

51) $9x^2 - y^2 + 9 = 0$

52) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y + 199 = 0$

53) $3x^2 - 4y^2 + 32y - 76 = 0$

54) (4, -8) e (4, -2)

55) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

56) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

57) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

58) a) $y^2 - 6y + 8x + 1 = 0$ (parábola)

b) $3x^2 + 4y^2 + 14x - 24y + 31 = 0$ (elipse)

c) $3x^2 - y^2 - 26x + 6y + 26 = 0$ (hipérbole)

Curiosidades

Para encerrar o estudo das cônicas, vejamos, a título de ilustração, a *propriedade da reflexão* de cada uma delas.

1) **Parábola**

Na prática, esta curva tem uma série de aplicações. Ouve-se dizer que antenas de TV e os espelhos dos faróis dos automóveis são parabólicos. Mas isso tem alguma coisa a ver com a curva que estudamos? Tem tudo.

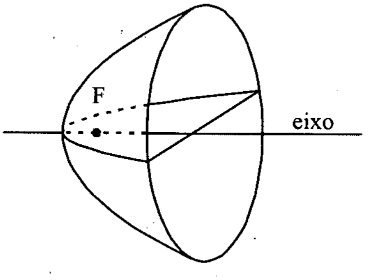


Figura 8.46

Na verdade não se trata de "uma" só parábola e sim de um parabolóide (Figura 8.46), que é a superfície de revolução obtida girando-se a parábola em torno do seu eixo. Todas as infinitas parábolas que possamos imaginar formando o parabolóide têm o mesmo foco F.

Admitindo espelhada a parte interna deste parabolóide (pode ser um farol de automóvel, ou holofote, ou outros refletores em geral), se uma fonte de luz for colocada em F, os raios que esta fonte irradia serão refletidos ao longo de retas paralelas ao eixo (Figura 8.47).

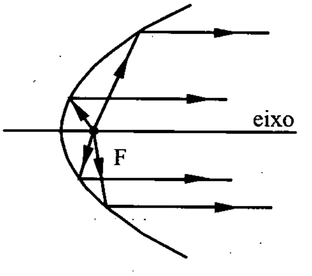


Figura 8.47

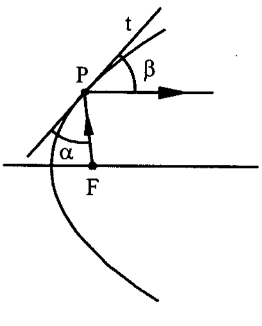


Figura 8.48

Esta propriedade, chamada *reflexão*, está baseada no fato de que, sendo *t* uma reta tangente a uma parábola no ponto P (Figura 8.48) o ângulo α (ângulo de incidência) é igual ao ângulo β (ângulo de reflexão).

Este mesmo princípio é utilizado na fabricação de antenas parabólicas e espelhos de telescópios. Como os sinais (ondas de rádio ou raios de luz) são muito fracos, há a necessidade de captá-los utilizando uma superfície ampla e concentrá-los num único ponto (que é o foco F) a fim de serem amplificados (Figura 8.49).

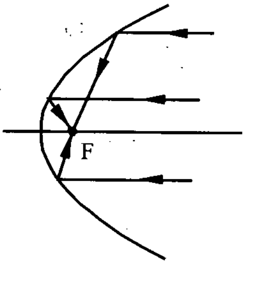


Figura 8.49

Entende-se agora porque as antenas e os espelhos telescópicos precisam ser parabólicos.

O experimento da foto (Figura 8.50) encontra-se no Museu de Ciências e Tecnologia da PUCRS e traduz de uma forma particular a propriedade da reflexão da parábola. A mesa é dotada de um anteparo curvo de forma parabólica. O orifício na mesa está exatamente na posição do foco desta parábola. Então, um objeto (na foto é um botão) ao ser lançado paralelamente ao eixo da curva, após chocar-se contra o anteparo, retorna e cai sempre no orifício. O menino da foto deve estar achando esta "proeza" resultado de sua habilidade.

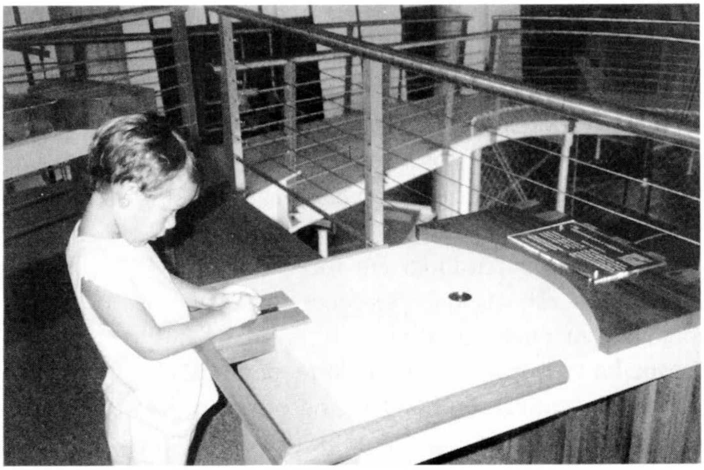


Figura 8.50

2) Elipse

A propriedade da reflexão na elipse é análoga à da parábola. Se t é a tangente no ponto P de uma elipse de focos F_1 e F_2, são iguais os ângulos α e β formados pela reta tangente e os raios focais F_1P e F_2P, respectivamente (Figura 8.51).

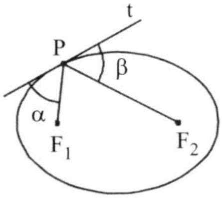


Figura 8.51

Imaginando uma superfície obtida girando-se a elipse em torno do eixo maior (a superfície é um elipsóide), e admitindo espelhada a parte interna, se uma fonte de luz for colocada num dos focos, digamos F_1, os raios que esta fonte irradia serão refletidos todos no outro foco F_2 (Figura 8.52).

Se ao invés de uma fonte luminosa tivéssemos uma fonte sonora, o som emitido de F_1 se refletiria nas paredes do elipsóide, convergindo em F_2.

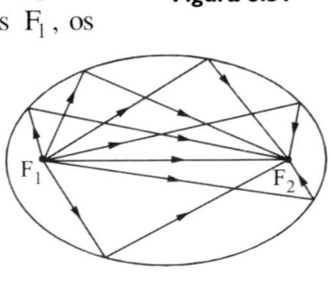


Figura 8.52

3) Hipérbole

A propriedade da reflexão na hipérbole é análoga à da elipse: a reta tangente t num ponto P da hipérbole é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais F_1P e F_2P, isto é, $\alpha = \beta$ (Figura 8.53(a)).

Seja a superfície obtida girando-se uma hipérbole em torno da reta que contém seu eixo real (a superfície é um hiperbolóide de duas folhas), e admitindo-se espelhada a parte externa da superfície, todo raio de luz incidente à superfície na direção de um dos focos, é refletido na direção do outro foco (Figura 8.53(b)).

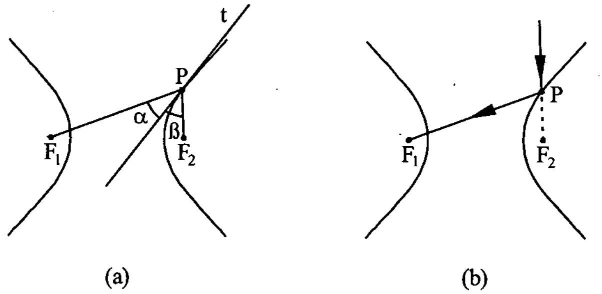


Figura 8.53

9

Superfícies Quádricas

Introdução

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \qquad (1)$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero, (a fim de assegurar grau 2 para a equação), representa uma *superfície quádrica*, ou simplesmente, uma *quádrica.*

Observemos que, se a superfície quádrica dada pela equação (1) for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma *cônica.* A interseção de uma superfície com um plano é chamada *traço* da superfície no plano.

Por exemplo, o traço da superfície quádrica (1) no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0 \qquad (2)$$

contida no plano $z = 0$, isto é, no plano xOy, e representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, pois suas equações gerais são desse tipo. Em casos particulares, no entanto, a equação (2) pode também representar uma reta $(3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$, ou duas retas $(xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0)$, ou um ponto $(3x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0)$ ou o conjunto vazio $(x^2 + y^2 + 3 = 0)$. Estes casos constituem as cônicas *degeneradas.*

A redução da equação geral (1) das quádricas às suas formas mais simples exige cálculos laboriosos, o que não é objeto deste texto. Daremos ênfase ao estudo das quádricas representadas por equações denominadas *canônicas* e intimamente relacionadas às formas reduzidas das cônicas.

Superfícies de Revolução

Superfície de Revolução é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira de 360° em torno de uma reta (chamada eixo) situada no plano da curva. Neste caso, o traço da superfície num plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida através da equação da geratriz.

Exemplo

Seja a superfície gerada pela revolução da parábola $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ em torno do eixo dos y (Figura 9.1).

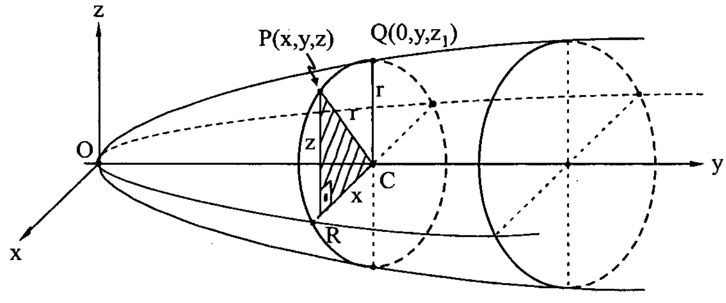


Figura 9.1

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície e $C(0, y, 0)$ o centro da circunferência que é o traço da superfície no plano que passa por P e é perpendicular ao eixo dos y (eixo de revolução). A interseção desta circunferência com a parábola é o ponto $Q(0, y, z_1)$.

Seja R o pé da perpendicular traçada de P ao plano xy. Ainda, CP = CQ = r, por serem raios da mesma circunferência.

Como o triângulo CRP é retângulo em R, vem $CP = \sqrt{(CR)^2 + (RP)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Mas, $CQ = z_1 = \sqrt{2y}$, pois Q é ponto da parábola. Portanto,

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2y}$$

ou

$$x^2 + z^2 = 2y \qquad (3)$$

que é a equação desta superfície.

Observemos que essa equação (3) pode ser obtida imediatamente pela substituição, na equação $z^2 = 2y$ (geratriz), de z por $\sqrt{x^2+z^2}$. Utilizaremos este procedimento para todos os casos de superfície de revolução.

Então, se a geratriz estiver contida num dos planos coordenados e girar de 360° em torno de um dos eixos desse plano, a equação da superfície assim gerada será obtida da seguinte maneira: se a curva gira em torno

a) do eixo dos x, substitui-se y ou z na equação da curva por $\sqrt{y^2+z^2}$;

b) do eixo dos y, substitui-se x ou z na equação da curva por $\sqrt{x^2+z^2}$;

c) do eixo dos z, substitui-se x ou y na equação da curva por $\sqrt{x^2+y^2}$.

A seguir estudaremos as superfícies quádricas denominadas *elipsóides, hiperbolóides* e *parabolóides.*

Observação

Quando da substituição de z por $\sqrt{x^2+z^2}$ na equação $z^2 = 2y$ para resultar $x^2+z^2 = 2y$, considerou-se $z \geq 0$. Para se ter a superfície completa devemos substituir z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, o que não vai alterar em nada a equação (3) da superfície. A mesma observação vale também para as outras substituições acima descritas.

Elipsóides

Consideremos no plano yz a elipse de equações

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0 \text{ (Figura 9.2)}$$

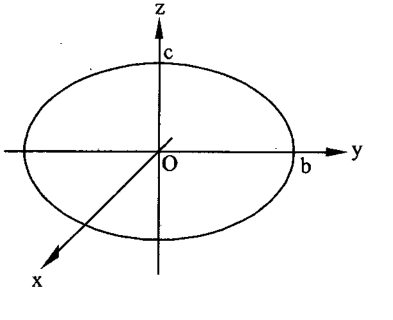


Figura 9.2

Ao girarmos essa elipse em torno do eixo Oy, obtemos o *elipsóide de revolução* (Figura 9.3), cuja equação será obtida da equação da elipse, substituindo-se z

por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

ou

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

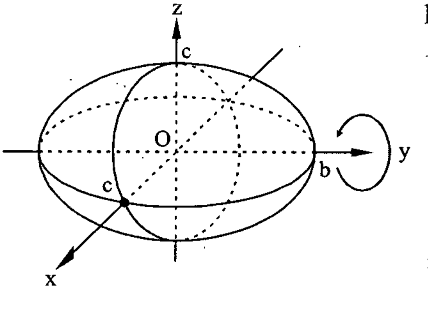


Figura 9.3

De maneira análoga se obtém o elipsóide de revolução em torno de Oz. Neste caso sua equação é obtida da equação da elipse, substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

O elipsóide da maneira mais geral (Figura 9.4) é representado pela equação

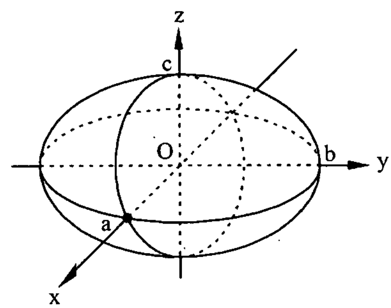


Figura 9.4

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)}$$

onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide. Observemos ainda que os pontos $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$ são soluções da equação (4), chamada *forma canônica* do elipsóide.

O traço no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z = 0$ e os traços nos planos xz e yz são as elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y = 0$ e $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x = 0$, respectivamente.

Observemos também que as interseções do elipsóide com planos $x = k$, $y = k$ ou $z = k$ (k = constante), resultam numa elipse, num ponto ou no conjunto vazio.

No caso de $a = b = c$, a equação (4) toma a forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

ou

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (5)}$$

e representa uma *superfície esférica* de centro (0, 0, 0) e raio *a*.

Observemos que esta superfície também é de revolução e obtida pela revolução de uma circunferência em torno de um de seus diâmetros.

Se o centro do elipsóide é o ponto (h, k, l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação (4) assume a forma

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1}$$

obtida por uma translação de eixos.

Exemplos

1) Determinar uma equação da superfície esférica de centro C e raio r, nos casos:
   a) C(0, 0, 0), r = 4
   b) C(2, 4, -1), r = 3

Solução:

a) Da equação (5), vem imediatamente

$$x^2+y^2+z^2=4^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2+z^2-16=0$$

b) Se o centro da superfície esférica é C(h,k,l), por simples translação de eixos a equação (5) assume a forma

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \tag{6}$$

No caso presente, tem-se

$$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=3^2$$

ou

$$x^2-4x+4+y^2-8y+16+z^2+2z+1=9$$

ou

$$x^2+y^2+z^2-4x-8y+2z+12=0$$

2) Dada a equação da superfície esférica $x^2+y^2+z^2+6x-4y-12=0$, determinar o centro e o raio.

Solução:

Comecemos escrevendo a equação na forma

$$(x^2+6x)+(y^2-4y)+z^2=12$$

e completemos os quadrados

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)+(z^2)=12+9+4$$

não esquecendo de somar 9 e 4 ao segundo membro para "equilibrar" a soma feita ao primeiro membro.

Logo, a equação fica

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=5^2$$

e, portanto, C(-3, 2, 0) e r = 5.

Observação

É fácil ver que uma equação de superfície esférica do tipo (6) poderá representar

a) um ponto, se $r^2=0$ (é o próprio centro);

b) um conjunto vazio, se $r^2<0$.

3) Obter uma equação geral do plano π tangente à superfície esférica $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-35=0$, no ponto P(4, 3, 2).

Solução:

Um plano π é tangente a uma superfície esférica de centro C e raio r se a distância $d(C,\pi)=r$ e, sendo P o ponto de tangência, o vetor $\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal a π. Então, precisamos determinar o ponto C.

Utilizando o método do problema anterior, a equação da superfície esférica será

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=49$$

e, portanto, C(2, -3, -1).

Como $\overrightarrow{CP}=P-C=(2,6,3)$ é um vetor normal a π, uma equação geral de π é $2x+6y+3z+d=0$ e pelo fato de que $P(4,3,2)\in\pi$ tem-se $2(4)+6(3)+3(2)+d=0$ e $d=-32$. Logo, uma equação de π é $2x+6y+3z-32=0$.

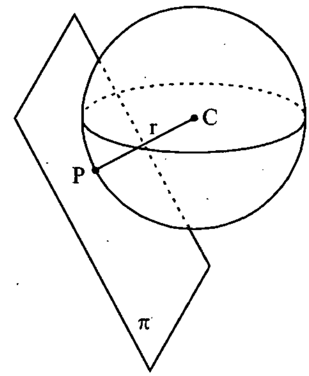


Figura 9.5

Hiperbolóides

Consideremos no plano yz a hipérbole de equações

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0 \text{ (Figura 9.6)}$$

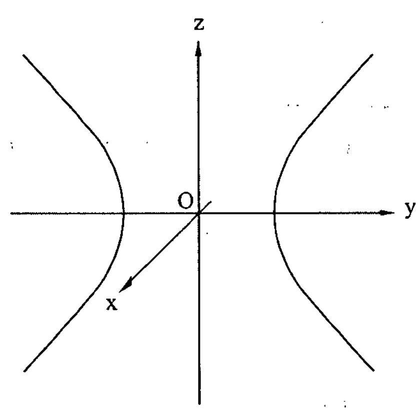


Figura 9.6

Os *hiperbolóides de revolução* serão obtidos por rotações em torno de um de seus eixos.

a) Hiperbolóide de uma Folha

A rotação dessa hipérbole em torno do eixo Oz resulta no *hiperbolóide de uma folha* (Figura 9.7), cuja equação será obtida da equação da hipérbole substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ou

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Um hiperbolóide de uma folha da maneira mais geral é representado pela equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7)}$$

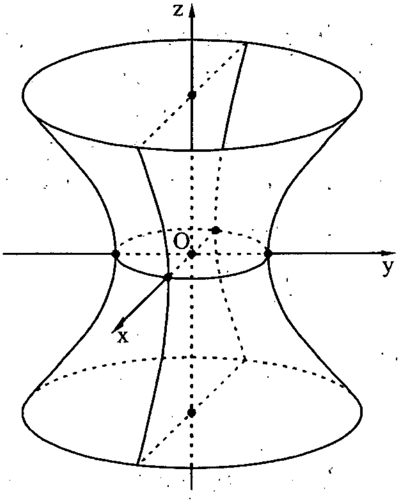


Figura 9.7

chamada *forma canônica* do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

A equação (7) mostra que o traço do hiperbolóide no plano xy é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$$

e os traços nos planos xz e yz são as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,$$

respectivamente.

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles.

Observação

É importante assinalar que, embora a Figura 9.7 mostre um hiperbolóide limitado ao longo do eixo Oz, essa figura se prolonga indefinidamente ao longo desse eixo (a menos que se restrinja o valor de z a um intervalo limitado). Esta observação estende-se para todas as superfícies a serem apresentadas.

b) Hiperbolóide de duas Folhas

A rotação da hipérbole da Figura 9.6 em torno do eixo Oy resulta no *hiperbolóide de duas folhas* (Figura 9.8) cuja equação será obtida da equação dessa hipérbole, substituindo-se z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

ou

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

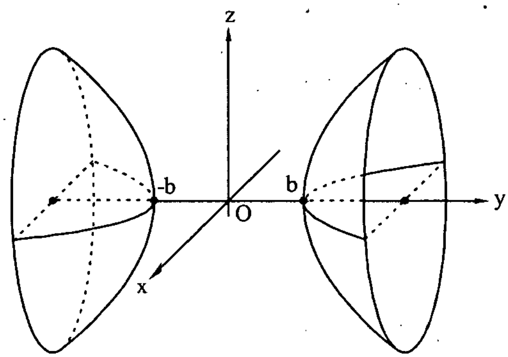


Figura 9.8

Um hiperbolóide de duas folhas da maneira mais geral é representado pela equação

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

chamada *forma canônica* do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo Oy. As outras duas formas são

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

Observemos ainda que os traços desses hiperbolóides nos planos x = k, y = k ou z = k (k = constante) resultam em hipérboles, elipses, um ponto ou o conjunto vazio.

Resumo

As equações dos elipsóides e hiperbolóides podem ser reunidas em

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$

e conforme os sinais dos termos do 1º membro, apresentados nesta ordem, temos o seguinte quadro:

	sinais	ao longo do eixo
Elipsóide	+ + +	-------
Hiperbolóide de uma folha	- + + + - + + + -	Ox Oy Oz
Hiperbolóide de duas folhas	+ - - - + - - - +	Ox Oy Oz

Parabolóides

a) Parabolóide Elíptico

Consideremos no plano yz a parábola de equações

$$z = \frac{y^2}{b^2},\ x = 0 \text{ (Figura 9.9)}$$

A rotação dessa parábola em torno do eixo Oz resulta no *parabolóide de revolução* (Figura 9.10) cuja equação será obtida da equação da parábola, substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

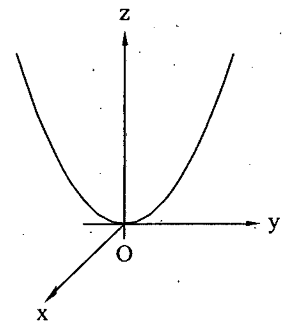


Figura 9.9

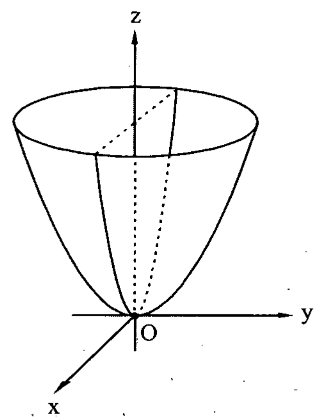


Figura 9.10

Um parabolóide mais geral, denominado *parabolóide elíptico*, é representado pela equação

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (8)}$$

chamada *forma canônica* do parabolóide elíptico ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

A equação (8) mostra que o traço do parabolóide no plano xy (z = 0) é a origem (0, 0, 0), os traços nos planos $z = k > 0$ são elipses, nos planos $z = k < 0$ são vazios e nos planos x = k e y = k são parábolas.

Exemplo

A Figura 9.11 representa o parabolóide elíptico de equação

$$y = 4x^2 + z^2$$

ou

$$y = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1}$$

ao longo do eixo Oy.

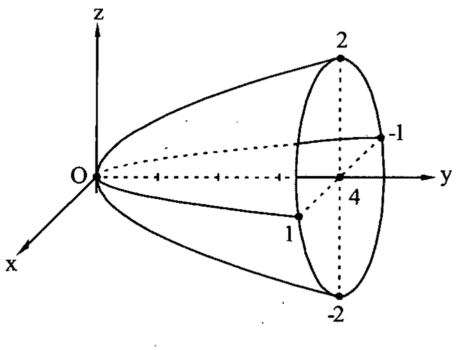


Figura 9.11

Observemos que no plano y = 4 está a elipse $x^2+\frac{z^2}{4}=1$ e as parábolas nos planos x = 0 e z = 0 são

$$y = z^2,\ x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 4x^2,\ z = 0, \text{ respectivamente.}$$

b) Parabolóide Hiperbólico

A superfície dada por uma equação do tipo

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \qquad (9)$$

é denominada *parabolóide hiperbólico* e esta equação é chamada *forma canônica* do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo Oz (Figura 9.12). As outras formas são

$$y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

e

$$x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

e representam *parabolóides hiperbólicos* ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

A equação (9) e a própria Figura 9.12 mostram que os traços nos planos x = k e y = k são parábolas, ao passo que em z = k são hipérboles que se degeneram em duas retas quando z = 0. Na verdade, fazendo z = 0 na equação (9), resulta

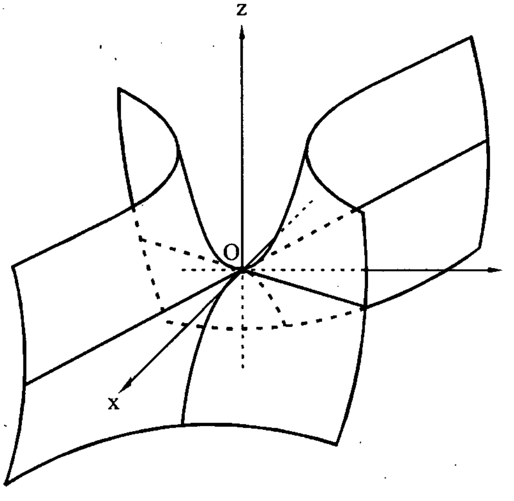


Figura 9.12

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

ou $$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) = 0$$

o que implica

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0$$

e representam as duas retas acima referidas, podendo ser visualizadas na Figura 9.12. Ainda com relação à equação (9), observemos que quando $z = k > 0$, os traços nesses planos são hipérboles com eixo real paralelo a Oy, enquanto que para $z = k < 0$, os traços são hipérboles de eixo real paralelo a Ox.

Superfícies Cônicas

Consideremos no plano yz a reta g de equações
$z = my,\ x = 0$ (Figura 9.13).

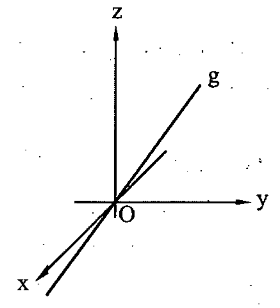


Figura 9.13

A rotação desta reta em torno do eixo Oz resulta na *superfície cônica circular* (Figura 9.14) cuja equação será obtida da equação da reta substituindo-se y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z = m\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{ou} \quad z^2 = m^2\left(x^2+y^2\right)$$

ou ainda,

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

A reta g é chamada *geratriz* da superfície e o ponto O, que separa as duas folhas é o *vértice* da superfície.

Uma superfície cônica mais geral, denominada *superfície cônica elíptica* é representada pela equação

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (10)}$$

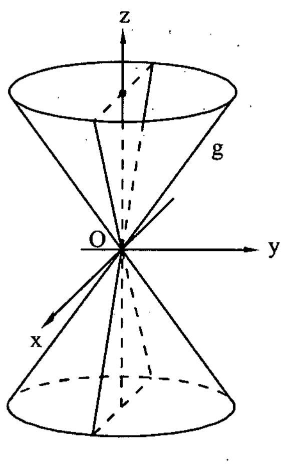


Figura 9.14

chamada *forma canônica* da superfície cônica ao longo do eixo Oz. As outras duas formas são

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad \text{e} \qquad x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e representam superfícies cônicas elípticas ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

A equação (10) mostra que o traço da superfície no plano xy ($z = 0$) é o ponto O(0, 0, 0) e em $z = k$ são elipses. Os traços nos planos $x = k$ ou $y = k$ são hipérboles que se degeneram em duas retas no caso de $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo

Se a reta $z = 2y,\ x = 0$, do plano yz é girada em torno de Oz, a superfície de revolução resultante é a superfície cônica circular de vértice na origem e eixo coincidindo com Oz, e cuja equação se obtém de $z = 2y$ substituindo y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z = \pm 2\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{ou} \qquad z^2 = 4(x^2+y^2)$$

Observação

No caso dos hiperbolóides, parabolóides e superfícies cônicas de centro ou vértice no ponto (h, k, l) e eixo paralelo a um eixo coordenado, de forma análoga ao que foi feito para o elipsóide, as equações serão obtidas das correspondentes formas canônicas substituindo-se x por x - h, y por y - k e z por z - l.

Superfícies Cilíndricas

Seja C uma curva plana e *r* uma reta fixa não-paralela ao plano de C.

Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta *g* que se move paralelamente à reta fixa *r* em contato permanente com a curva plana C.

A reta *g* que se move é denominada *geratriz* e a curva C é a *diretriz* da superfície cilíndrica (Figura 9.15).

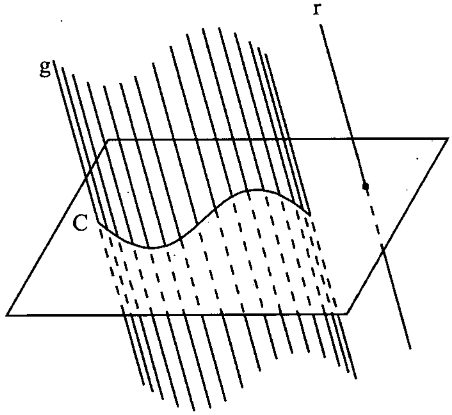


Figura 9.15

Esta superfície pode ser vista como um conjunto de infinitas retas paralelas que são as infinitas posições da geratriz.

Em nosso estudo consideraremos apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra num dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo perpendicular ao plano da diretriz.

Para exemplificar, consideremos a parábola no plano xy dada por

$$x^2 = 2y \qquad (11)$$

(na verdade a parábola tem equações: $x^2 = 2y$, $z = 0$).

Como a geratriz é uma reta paralela ao eixo Oz, a superfície cilíndrica está ao longo deste eixo (Figura 9.16).

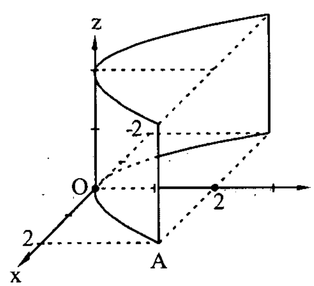


Figura 9.16

É importante observar que se tomarmos um ponto da diretriz, por exemplo A(2, 2, 0), todo ponto do tipo (2, 2, z), para z real qualquer, também satisfaz a equação (11) pois esta pode ser vista como $x^2 = 2y + 0z$. Em outras palavras, a superfície contém o ponto A e toda reta por A e paralela ao eixo Oz. Significa dizer: o valor de z não influi no fato de um ponto P(x, y, z) pertencer ou não à superfície. Então, como para o ponto só interessam as variáveis x e y, *a própria equação da diretriz é a equação da superfície cilíndrica*, isto é,

$$x^2 = 2y$$

A ausência da variável z para este caso permite concluir de modo geral: o gráfico em três dimensões de uma equação que não apresenta uma determinada variável, corresponde a uma superfície cilíndrica ao longo do eixo desta variável ausente. E, ainda, conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada *circular, elíptica, hiperbólica* ou *parabólica.* Portanto, a Figura 9.16 apresenta uma superfície cilíndrica parabólica ao longo do eixo Oz.

Assim também, a equação

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

representa uma superfície cilíndrica elíptica (a diretriz é uma elipse) ao longo do eixo Oy (y é a variável ausente) (Figura 9.17).

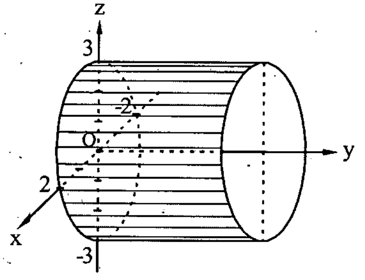


Figura 9.17

Problemas Propostos

1) Determinar uma equação das superfícies esféricas nas condições dadas.
   a) Centro C(2, -3, 1) e raio 4.
   b) Centro C(4, -1, -2) e passando por P(2, 3, -1).
   c) O segmento de extremos A(-1, 3, -5) e B(5, -1, -3) é um de seus diâmetros.
   d) Centro C(-2, 3, 4) e tangente ao eixo Oz.
   e) Centro C(0, -4, 3) e tangente ao plano $\pi: x+2y-2z-2=0$
2) Determinar uma equação da superfície esférica de centro C(2, -3, 4) e
   a) tangente ao plano xOy
   b) tangente ao plano xOz
   c) tangente ao plano yOz
3) Obter uma equação geral do plano tangente à superfície esférica *E* no ponto P.
   a) $E: x^2+y^2+z^2=9$, P(2, 1, -2)
   b) $E: (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=12$, P(1, -3, 4)
   c) $E: x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$, P(2, -5, 6)
4) Obter uma equação da superfície gerada pela rotação de cada uma das curvas dadas em torno do eixo indicado.
   a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=0$; eixo maior.
   b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=0$; eixo menor.
   c) $x^2+y^2=9$, $z=0$; eixo Ox.
   d) $\frac{z^2}{4}-y^2=1$, $x=0$; eixo Oy.
   e) $\frac{z^2}{4}-y^2=1$, $x=0$; eixo Oz.
   f) $y=4x^2$, $z=0$; eixo Oy.
   g) $z=-2y^2$, $x=0$; eixo Oz.
   h) $z=2y$, $x=0$; eixo Oz.
   i) $z=2y$, $x=0$; eixo Oy.
   j) $y=x$, $z=0$; eixo Oy.

5) Reduzir cada uma das equações à forma canônica (caso não esteja), identificar a superfície e construir seu gráfico.

a) $x^2+y^2+z^2=25$

b) $2x^2+4y^2+z^2-16=0$

c) $36x^2+16y^2+9z^2-144=0$

d) $36x^2+16y^2-9z^2-144=0$

e) $4x^2-y^2+4z^2-4=0$

f) $z^2-4x^2-4y^2=4$

g) $4x^2-y^2+2z^2+4=0$

h) $4x^2+z^2-y=0$

i) $9x^2+4y^2+9z=0$

j) $y^2+4z^2-x=0$

k) $z=y^2-x^2$

l) $36x^2-4y^2+9z^2=0$

m) $4x^2+4y^2-z^2=0$

n) $z=x^2+y^2$

o) $z=2+x^2+y^2$

p) $z=-x^2-y^2$

q) $z=6-x^2-y^2$

r) $y=-2+x^2+z^2$

s) $x^2+y^2=9$

t) $x^2+z=0$

u) $z=4-x^2$

v) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

6) Identificar e representar graficamente as superfícies expressas pelas equações nos intervalos dados.

a) $x^2+\frac{y^2}{4}=-\frac{z}{3}, \quad -3\leq z\leq 0$

b) $3x^2-y^2+2z^2=0, \quad -6\leq y\leq 6$

c) $z^2=x^2+y^2+1, \quad -3\leq z\leq 3$

d) $z^2=x^2+y^2-1, \quad -3\leq z\leq 3$

e) $y=-2+x^2+\frac{z^2}{2}, \quad -2\leq y\leq 2$

f) $y=6-x^2-z^2, \quad -3\leq y\leq 6$

g) $x^2=2z, \quad -3\leq y\leq 5$

h) $x^2-y^2+z^2=0, \quad -4\leq y\leq 4$

i) $x=-4+\frac{y^2}{2}+z^2, \quad -4\leq x\leq 5$

j) $z=4-2x^2-y^2, \quad 0\leq z\leq 4$

k) $y^2+4z^2=x, \quad 0\leq x\leq 4$

l) $y^2+4z^2-4=0, -4\leq x\leq 6$

m) $y^2-x^2=16, \quad 0\leq z\leq 4$

n) $z=9-y^2, \quad -4\leq x\leq 4$

7) Identificar as superfícies definidas pelas equações, dizendo ao longo de que eixo elas ocorrem, conforme o caso.

a) $25x^2+100y^2+36z^2-900=0$

b) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

c) $z=-\sqrt{16-x^2-y^2}$

d) $y=\sqrt{16x^2+4z^2}$

e) $z^2 = x^2 + y^2$

f) $12x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 12 = 0$

g) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

h) $z = \sqrt{4 + 4x^2 + 4y^2}$

i) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

j) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

k) $x^2 + z - 9 = 0$

l) $x - y = 0$

8) Identificar a superfície S e a sua interseção com o plano π dado. Representar graficamente esta interseção no plano π.

a) $S: y^2 - 4z^2 - 2x = 0$ e $\pi: x - 2 = 0$

b) $S: 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ e $\pi: z = 4$

c) $S: z = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ e $\pi: z = 1$

d) $S: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ e $\pi: x = 2$

e) $S: x^2 + y + z^2 = 0$ e $\pi: y + 4 = 0$

f) $S: 18x^2 + 9y^2 - 2z^2 - 18 = 0$ e $\pi: z = 3$

9) Identificar e descrever as superfícies de equações dadas.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

b) $x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 4z + 28 = 0$

c) $4x^2 - 2y^2 + z^2 - 24x - 4y + 8z + 42 = 0$

d) $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 2y + 5 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

f) $y^2 - 4z^2 - 4x - 6y - 24z - 31 = 0$

g) $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 24x - 6y - 12z + 39 = 0$

h) $x^2 - 4x - z + 6 = 0$

i) $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 - 24y + 6z - 27 = 0$

j) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - z + 12 = 0$

10) O traço de um elipsóide (centro na origem) no plano xy é a elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$.

Determinar a equação do elipsóide, sabendo que contém o ponto $(0, 1, \sqrt{6})$.

11) Deduzir uma equação do parabolóide de vértice na origem, sabendo que sua interseção com o plano z = 4 é a circunferência de centro (0, 0, 4) e raio 3.

12) Determinar os vértices e os focos da elipse $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{9}=1$, z = 3.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-2=0$

b) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+4z=0$

c) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z+7=0$

d) $x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+16=0$

e) $9x^2+9y^2+9z^2+72y-54z-31=0$

2) a) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+13=0$

b) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+20=0$

c) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+25=0$

3) a) $2x+y-2z-9=0$

b) $x+y-z+6=0$

c) $4y-3z+38=0$

4) a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$

b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$

c) $x^2+y^2+z^2=9$

d) $\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{4}=1$

e) $\frac{z^2}{4}-x^2-y^2=1$

f) $y=4x^2+4z^2$

g) $z=-2x^2-2y^2$

h) $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$

i) $\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{4}=0$

j) $x^2-y^2+z^2=0$

5) a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{25}=1$, superfície esférica de raio 5

b) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$, elipsóide

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, elipsóide

d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, hiperbolóide de uma folha

e) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$, hiperbolóide de uma folha

f) $-x^2-y^2+\frac{z^2}{4}=1$, hiperbolóide de duas folhas

g) $-x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1$, hiperbolóide de duas folhas

h) $y=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+z^2$, parabolóide elíptico

i) $z=-x^2-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}$, parabolóide elíptico

j) $x=y^2+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}$, parabolóide elíptico

k) parabolóide hiperbólico

l) $y^2=\frac{x^2}{\frac{1}{9}}+\frac{z^2}{\frac{4}{9}}$, superfície cônica

m) $z^2=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}$, superfície cônica

n) parabolóide circular
o) parabolóide circular
p) parabolóide circular
q) parabolóide circular
r) parabolóide circular
s) superfície cilíndrica circular
t) superfície cilíndrica parabólica
u) superfície cilíndrica parabólica
v) superfície cilíndrica hiperbólica

6) a) parabolóide elíptico
b) superfície cônica
c) hiperbolóide de duas folhas
d) hiperbolóide de uma folha
e) parabolóide elíptico
f) parabolóide circular
g) superfície cilíndrica parabólica
h) superfície cônica circular
i) parabolóide elíptico
j) parabolóide elíptico
k) parabolóide elíptico
l) superfície cilíndrica elíptica
m) superfície cilíndrica hiperbólica
n) superfície cilíndrica parabólica

7) a) elipsóide
b) semi-superfície esférica superior de raio 3
c) semi-superfície esférica inferior de raio 4
d) semi-superfície cônica ao longo de Oy
e) superfície cônica circular ao longo de Oz
f) hiperbolóide de duas folhas ao longo de Oz
g) semi-hiperbolóide de uma folha ao longo de Oz
h) semi-hiperbolóide de duas folhas ao longo de Oz
i) semi-superfície cônica inferior ao longo de Oz
j) semi-superfície cônica ao longo de Oz
k) superfície cilíndrica parabólica ao longo de Oy
l) plano que contém o eixo Oz

8) a) parabolóide hiperbólico e hipérbole
b) superfície cônica e circunferência
c) parabolóide hiperbólico e hipérbole
d) hiperbolóide de duas folhas e ponto (2, 0, 0)
e) parabolóide elíptico e circunferência
f) hiperbolóide de uma folha e elipse

9) a) superfície esférica, centro (3, -2, 0) e raio 2
b) parabolóide elíptico, vértice (-4, 1, 2), eixo paralelo a Oz
c) hiperbolóide de uma folha, centro (3, -1, -4), eixo paralelo a Oy
d) hiperbolóide de duas folhas, centro (0, -1, 0), eixo paralelo a Oz
e) superfície cilíndrica circular, geratriz paralela a Oz
f) parabolóide hiperbólico, centro (-1, 3, -3), ao longo de Ox
g) elipsóide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz
h) superfície cilíndrica parabólica, geratriz paralela a Oy
i) superfície cônica, vértice (0, -2, 1), eixo paralelo a Ox
j) parabolóide circular, vértice (2, 3, -1), eixo paralelo a Oz

10) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$

11) $4x^2+4y^2-9z=0$

12) vértices: $(0, \pm 4, 3)$ e $(\pm 2, 0, 3)$, focos: $(0, \pm 2\sqrt{3}, 3)$.

Bibliografia

AYRES, Jr, Frank. *Geometria Analítica Plana e Sólida* - São Paulo: Mc Graw-Hill do Brasil Ltda, 1973.

BOULUS, Paulo, CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial* - São Paulo: Mc Graw-Hill 1987, 2ª edição.

CAROLI, Alésio João de; CALLIOLI, Carlos Alberto, FEITOSA, Miguel Oliva. *Vetores, Geometria Analítica: teoria e exercícios* - São Paulo: Nobel, 1968, 6ª edição.

KINDLE, J.H. *Geometria Analítica* (Coleção Schaum) - México: Mc Graw-Hill, 1970.

KLETENIK, D. *Problemas de Geometria Analítica* - Moscou: Editorial Mir, 1968.

LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço* - Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática, 1993.

MARSDEN, Jerrold E.; TROMBA, Anthony J. *Vector Calculus* - New York: W. H. Freeman and Company, 1996. Fourth Edition.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Lima da. *Geometria Analítica* - Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984, 1ª edição.

RIGHETTO, Armando. *Vetores e Geometria Analítica* - São Paulo: IBLC - Instituto Brasileiro do Livro Científico Ltda, 1988.

SHENK, Al. *Cálculo e Geometria Analítica* - Rio de Janeiro, 1984.

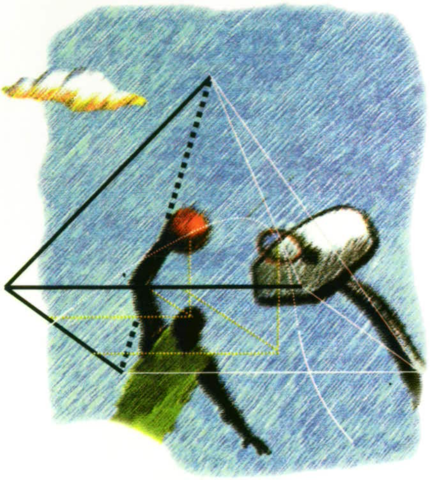
SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica* - São Paulo: Mc Graw-Hill., 1987.

SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com Geometria Analítica* - Vol 2. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1994, 2ª edição.
VENTURI, Jaci J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica* - Curitiba: Scientia et Labor - Editora da UFPR, 1990, 3ª edição.

GRÁFICA PAYM
Tel. (011) 4392-3344
paym@terra.com.br

Paulo Winterle

VETORES e GEOMETRIA ANALÍTICA



O autor apresenta um livro cujo realce está em suas qualidades didáticas

- Vetores
- Produtos Escalar, Vetorial e Misto
- A Reta e o Plano
- Distâncias
- Cônicas e Quádricas

Os títulos acima citados são apresentados de forma acessível e enriquecidos com muitas figuras e vários exemplos. Não houve economia em exercícios resolvidos e propostos, dando ao livro uma estrutura e uma abrangência tais que permitam seu uso em cursos com diferentes orientações e níveis de adiantamento.

O Autor

Bacharel e Licenciado em Matemática pela PUCRS. Sua vida profissional caracterizou-se pela relevância na dedicação dada à sala de aula. Professor de Matemática desde 1959, exerceu a docência nos mais diferentes níveis - Alfabetização, Ensino Fundamental e Médio, Cursos Pré-Vestibulares, Ensino Superior, tendo atuado 26 anos na UFRGS e ainda em plena atividade na PUCRS, onde já completou 35 anos de docência, em diversos Cursos de Graduação. Participou de Comissões de Concursos Públicos e integrou equipes de elaboração de provas de vestibular daquelas Universidades. Exerceu atividades administrativas de Direção e de Coordenação de Departamento. Autor de obras didáticas de Matemática para o Ensino Médio e quatro livros de Geometria Analítica e Álgebra Linear, para o Ensino Superior, resultante de estudos e dedicação contínuos destes conteúdos.

PEARSON
Makron Books

www.pearson.com.br

ISBN 85-346-1109-2
9 788534 611091