$$\inf\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\} = \inf\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = 0.$$

Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 0] = \{0\}$.

N Dizemos que $[0, 0]$ é um intervalo fechado degenerado.

Completamos, assim, o conteúdo desta unidade. Veja os principais pontos que você deve atentar na síntese que segue.

1 Síntese

Nesta unidade nós conhecemos as propriedades de um corpo ordenado.

Introduzimos os conceitos de supremo e ínfimo.

Vimos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado que possui lacunas, isto é, existem conjuntos limitados de números racionais que não possuem supremo em Q.

Introduzimos a noção de corpo ordenado completo e apresentamos o axioma da existência do corpo ordenado completo dos números reais.

Finalizamos conhecendo um pouco o conjunto dos números irracionais.

O desencadeamento lógico da unidade é muito bonito, seguindo o raciocínio desenvolvido por Elon Lages Lima, no livro "Curso de Análise".

a Atividades de auto-avaliação

1) Seja K um corpo ordenado. Prove que vale a lei do corte para a adição, isto é,

$$x + y = y + z \Rightarrow x = y.$$

2) Sejam K um corpo ordenado e $a, b \in K$ tais que $0 < a < b$. Mostrar que $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

3) Sejam K um corpo ordenado e $a, b \in K$. Prove que

$$a = b \Leftrightarrow a \leq b \text{ e } b \leq a.$$

4) Num corpo ordenado K, prove que

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

5) Sejam K um corpo ordenado e $a, b \in K$ tais que $0 < a < b$. Prove que $a^2 < b^2$.

6) Por que um corpo deve conter pelo menos dois elementos?

7)Prove que num corpo ordenado K, se $0 \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq b$ então $|x - y| \leq b$.

8) Dado o conjunto

$X = \left\{ \frac{2}{n}, n \in \mathrm{N} \right\}$:

(a) Dê exemplos de 3 cotas superiores e 3 cotas inferiores de X, se existirem.

(b) Determine, se existirem, o supremo e o ínfimo de X.

9)Repita o exercício 8 para os conjuntos:

(a) $X = \left\{ \frac{2n-1}{n}, n \in \mathrm{N} \right\}$

(b) $Y = \{(-1)^n n, n \in \mathrm{N}\}$

(c) $Z = \{5 - 3n, n \in \mathrm{N}\}$

10) Escreva em linguagem coloquial a caracterização de ínfimo dada pelas condições I.1' e I.2', da seção 2.

11) Dê 2 exemplos de conjuntos de números racionais que:

(a) Não possuem supremo em Q.

(b) Não possuem ínfimo em Q.

(c) Não possuem ínfimo nem supremo em Q.

12) Identifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações que seguem, justificando as suas respostas.

(a) Se X é um conjunto finito, o ínfimo de X e o supremo de X pertencem a X.

(b) Se um conjunto X tem supremo então ele admite infinitas cotas superiores.

(c) O ínfimo de um conjunto limitado de números irracionais é um irracional.

(d) Qualquer subconjunto ilimitado de números racionais é denso em $\mathfrak{R}$.

13) Em $\mathfrak{R}$, dê um exemplo de um conjunto de números racionais que tem supremo irracional e de um conjunto de números irracionais que tem supremo racional.

14) Mostre que no princípio dos intervalos encaixados não podemos retirar as hipóteses:
(a) os intervalos são limitados;
(b) os intervalos são fechados.

S Saiba mais

Para aprofundar seus conhecimentos, sugerimos a leitura e estudo de todo o capítulo III do livro "Curso de Análise" de Elon Lages Lima e da sessão "Os números reais - de Eudoxo a Dedekind" do 1º capítulo do livro "Introdução à Análise Matemática" de Geraldo Ávila.