23. Dados a, b, ε num corpo ordenado K, prove que

$$|a-b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

Conclua que $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a < |b| + \varepsilon$.

24. Prove que, num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes: (i) K é arquimediano; (ii) $\mathbb{Z}$ é ilimitado superior e inferiormente; (iii) $\mathbb{Q}$ é ilimitado superior e inferiormente.

25. Prove que um corpo ordenado K é arquimediano se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$.

26. Seja $a > 1$ num corpo arquimediano K. Considere a função $f: \mathbb{Z} \to K$, definida por $f(n) = a^n$. Prove as seguintes afirmações: (i) $f(\mathbb{Z})$ não é limitado superiormente; (ii) $\inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

27. Sejam a racional diferente de zero, e x irracional. Prove que ax e $a + x$ são irracionais. Dê exemplo de dois números irracionais x, y tais que $x + y$ e $x \cdot y$ são racionais.

28. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

29. Prove que o conjunto K dos números reais da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais, é um corpo relativamente às operações de adição e multiplicação de números reais. Examine se o mesmo ocorre com os números da forma $a + b\sqrt[3]{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$.

30. Sejam a, b números racionais positivos. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais. (*Sugestão:* multiplique por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.)

31. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \leq \sup X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ real dado pode-se achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncie e demonstre um resultado análogo com inf em vez de sup.

32. Seja $X = \left\{\dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Prove que $\inf X = 0$.

33. Sejam $A \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

34. Sejam A, B conjuntos não-vazios de números reais, tais que $x \in A$, $y \in B \Rightarrow x \leq y$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Prove que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

35. Dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado inferiormente, seja $-A = \{-x;\ x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf A$.

36. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot A = \{c \cdot x;\ x \in A\}$. Prove que $c \cdot A$ é limitado e que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c \cdot A) =$ $= c \cdot \inf A$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

37. Dados A, $B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $\mathring{A} + B = \{x + y;\ x \in A,$ $y \in B\}$. Prove: i) $A + B$ é limitado; ii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; iii) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$; iv) Enuncie e demonstre resultados análogos supondo apenas A e B limitados superiormente (ou A e B limitados inferiormente).

38. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$. (Às vezes se escreve $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ ou $\sup\limits_{X} f$.) i) Prove que a soma de duas funções limitadas f, g: $X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada $f + g$: $X \to \mathbb{R}$. ii) Mostre que $(f + g)(X) \subset$ $\subset f(X) + g(X)$, na notação do Exerc. 37. iii) Conclua que $\sup(f + g) \leq$ $\leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$. iv) Considerando as funções f, g: $[-1, +1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

39. Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $A \cdot B =$ $= \{x \cdot y;\ x \in A$ e $y \in B\}$. Prove que se A e B forem limitados então $A \cdot B$ é limitado, sendo $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ e $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot$ $\cdot \inf B$.

40. i) Prove que o produto de duas funções limitadas f, g: $X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada $f \cdot g$: $X \to \mathbb{R}$. ii) Mostre que $(f \cdot g)(X) \subset f(X) \cdot g(X)$. iii) Conclua que, se f e g forem ambas positivas, tem-se $\sup(f \cdot g) \leq$ $\leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. iv) Dê exemplo em que falham as desigualdades estritas. v) Mostre porém que para todo f positiva tem-se $\sup(f^2) = [\sup f]^2$.

41. Analise os Exercs. 39 e 40 sem as hipóteses de positividade neles feitas.

42. Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio com coeficientes inteiros. i) Se um número racional $\dfrac{p}{q}$ (com p e q primos entre si) é tal que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, prove que p divide a_0 e q divide a_n. ii) Conclua que, quando $a_n = 1$, as raízes reais de f são inteiras ou irracionais. Em particular, examinando $x^n - a = 0$, conclua que, se um número inteiro $a > 0$ não possui n-ésima raiz inteira, então $\sqrt[n]{a}$ é irracional. iii) Use o resultado geral para provar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.