MODELAGEM MATEMÁTICA “*PARA*” SALA DE AULA: UMA EXPERIÊNCIA COM PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Kécio Gonçalves Leite[1]

RESUMO: Trata-se do relato de uma experiência vivenciada junto a professores da rede estadual de ensino de Rondônia durante um curso de 40 horas ministrado nas cidades de Ji-Paraná e Vilhena. Dividido em três momentos, o curso consistiu de uma discussão teórica sobre modelagem matemática, reflexão sobre exemplos de uso da modelagem em sala de aula e, por último, de uma etapa prática, em que os professores puseram a “mão na massa”, construindo modelos que dessem conta de explicar certos fenômenos. O objetivo não foi oferecer uma receita de como fazer modelagem com os alunos em sala, mas antes mostrar que não são necessários técnicas e equipamentos mirabolantes, nem muito tempo para preparação de recursos, para se dar aula com a modelagem. Além de matemáticos, a audiência do curso foi composta por professores de Física, Química e Biologia. Assim, mostrou-se que vários fenômenos de suas respectivas áreas comportam-se de forma a poderem ser descritos aproximadamente por sistemas lineares, sendo que a regressão linear simples foi o principal recurso utilizado para a construção dos modelos matemáticos. Após a fase “manual”, os professores foram orientados a produzir modelos valendo-se de uma planilha eletrônica.

Palavras-chave: Modelagem; Regressão Linear; Ensino.

1. Introdução

Observa-se hoje, a partir do discurso de grande parte dos professores de matemática da educação básica, que, embora os educadores reconheçam a importância da modelagem enquanto possibilidade para o ensino de diversos conteúdos, ainda não dominam “técnicas” ou “métodos” para assim procederem. Em alguns casos, a justificativa para a não adoção desta metodologia no ensino pelos profissionais docentes se apóia na falta de recursos materiais necessários à execução das atividades, na falta de tempo para fazê-lo ou mesmo na “virtual” dificuldade de tal prática, que se presume seja difícil e complexa. Tendo conhecimento de tal realidade, foi elaborada a proposta

[1] Especialista em Educação Matemática pela UFRO (2008), mestrando em Educação pela UFMT e professor de matemática da rede municipal de ensino de Ji-Paraná-RO – keciogoncalves@yahoo.com.br.

de uma experiência a ser realizada junto a professores da rede estadual de ensino de Rondônia, a convite da Universidade Federal de Rondônia e da Fundação Riomar. Tal proposta foi executada nas cidades de Ji-Paraná e Vilhena, durante um evento de formação continuada de professores de Matemática, Física, Química e Biologia.

No formato de um curso de 40 horas de duração, a experiência foi planejada com o objetivo de se mostrar aos professores que é possível fazer modelagem com poucos recursos e a partir de situações cotidianas, sendo necessários apenas conhecimentos elementares, de domínio comum entre os professores. Ou seja, a partir de situações possíveis de serem realizadas em sala de aula, objetivou-se praticar a modelagem com os professores para que eles percebessem que a complexidade e a dificuldade de tal prática podem ser minimizadas em muitos casos potencialmente ricos para a prática escolar.

A seguir, será apresentado parcialmente o conteúdo abordado no curso, dividindo-o em três momentos: uma perspectiva teórica da modelagem, a regressão linear como ferramenta para modelagem e a modelagem matemática propriamente dita.

2. Modelagem matemática de uma perspectiva teórica

Neste primeiro momento, discutiu-se com os professores o conceito primário de modelo e as possíveis definições de modelagem, tomando-se como referencial os textos de Cristofoletti (1999), Bassanezi (2002) e Ferruzzi (2004). As duas primeiras citações apresentadas como definições de modelo foram as seguintes: Modelo é...

> Qualquer representação simplificada da realidade ou de um aspecto do mundo real que surja como de interesse ao pesquisador, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução (CRISTOFOLETTI, 1999).
>
> Uma estruturação simplificada da realidade que supostamente apresenta, de forma generalizada, características ou relações importantes (HAGGETT, 1975, in CRISTOFOLETTI, 1999).

Da discussão destas duas definições surgiu a constatação de que, diferentemente do que alguns professores pensavam, um modelo matemático não substitui objetivamente um fenômeno em sua totalidade, uma vez que ele é apenas uma representação aproximada de tal fenômeno, característica esta reforçada pelos termos “representação simplificada” e “estruturação simplificada” presente nas duas definições.

Como exemplos de modelos matemáticos que expressam correlações, foram citadas então as equações $F = ma$, $PV = MR_O T$, $E = mc^2$ e seguiu-se uma discussão sobre o grau real de representatividade de tais modelos em relação aos fenômenos físicos modelados. Partiu-se então para o questionamento das formas de se chegar a tais modelos ou a outros modelos não citados. Neste momento foram apresentadas algumas definições de modelagem matemática, sendo as seguintes: Modelagem matemática é...

> Um conjunto de regras e procedimentos que guiam o modelador na obtenção de um modelo matemático que represente um problema extra-matemático, utilizando-se de técnicas matemáticas, conhecimentos científicos, experiência e criatividade (FERRUZZI, 2004).
>
> Arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2002, in FERRUZZI, 2004).

Da discussão destas duas definições, surgiram as constatações entre os professores de que:

1) O modelador começa com a premissa de que qualquer coisa é conectada com tudo o mais, com diferentes graus de conectividade.
2) Então ele seleciona apenas as conexões que acha mais importantes (relevantes) em seu sistema.
3) Através de correlações, transforma cada conexão do sistema em expressão matemática.
4) Encontra, finalmente, a equação que governa o sistema.

As próximas discussões do curso giraram em torno da tipologia de modelos. Em cada caso, exige-se uma abordagem diferente do fenômeno observado. Isso porque existem modelos determinísticos e modelos estocásticos ou probabilísticos. No primeiro caso, a causa e o efeito estão ligados diretamente, de modo que a presença ou variação de um implica o surgimento ou uma alteração no outro. São exemplos a equação que descreve o espaço percorrido com velocidade constante por um corpo num determinado tempo, ou a equação $F = ma$, em que a força é o produto da massa pela aceleração.

No caso dos modelos estocásticos, a vinculação entre causa e efeito é indireta, de modo que a presença ou variação da primeira reflete-se não no efeito, mas na probabilidade de ele surgir ou se modificar. São exemplos desse tipo de modelo a relação entre o ato de fumar e o desenvolvimento de câncer no fumante, ou o uso do cinto de segurança e as mortes de motoristas por acidente de trânsito.

Os modelos ainda são classificados em lineares e não-lineares, dependendo da previsibilidade (ou do grau de imprevisibilidade) do comportamento do fenômeno modelado e do custo operacional para o processamento do modelo. Geralmente, no primeiro caso, o dos modelos lineares, é possível medir e ter controle, com certa precisão, sobre praticamente todas as variáveis do problema, de modo que o modelo resultante se resume a uma única equação ou a um sistema de equações lineares. Embora sejam aparentemente simples e de fácil montagem e utilização, estes modelos descrevem grande parte dos fenômenos cotidianos a um cidadão comum, tais como os gastos com a compra numa padaria, o valor a ser pago ao abastecer o automóvel num posto de combustíveis e a variação de um investimento numa conta poupança.

Outro exemplo bastante ilustrativo de um modelo linear é o que descreve o crescimento populacional quando se tem conhecimentos e medidas de suas variáveis. Considerando que a mudança na população ocorre por unidade de tempo, ou matematicamente a variação da população (dP) é uma diferencial de tempo ($\frac{dP}{dt}$), então o que controla a mudança na população é a Natalidade (N), a Mortalidade (M), a Imigração (I) e a Emigração (E), de modo que a equação básica deste fenômeno é dada por $\frac{dP}{dt} = N - M + I - E$. Caso a variação na população ocorra a incrementos constantes, como, por exemplo, a população aumenta em 300 mil por ano, então ocorrerá um crescimento linear e o modelo que descreve a população no tempo assumirá a forma $P(t) = P_o + rt$, em que a população começa com um valor inicial P_o e varia a uma taxa rt. A figura 1 abaixo descreve o comportamento gráfico de tal modelo, considerando uma taxa positiva.

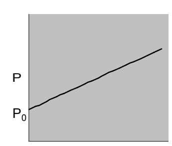


Figura 1: Gráfico do crescimento de uma população a incrementos constantes.

Uma outra possibilidade é de que o crescimento populacional seja proporcional à própria população. Nesse caso, o modelo terá um comportamento exponencial, também chamado de modelo malthusiano, e a equação assumirá a forma $P(t) = P_o e^{rt}$, onde P_o é a população inicial, que cresce a uma taxa e^{rt}. Outro exemplo de crescimento exponencial cujo modelo assume essa forma é o que ocorre com os juros compostos. Na figura 2 tem-se o comportamento gráfico de um modelo com estas características.

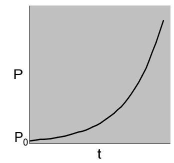


Figura 2: Gráfico do crescimento populacional proporcional à própria população.

Quanto aos modelos de sistemas não-lineares, discutiu-se no curso que eles possuem um grande número de variáveis que, geralmente, apresentam variações estocásticas de modo a serem de difícil previsibilidade. O alto custo operacional para processar tais variações gera grande complexidade que, associada à alta sensibilidade às condições iniciais, gera um largo espectro de resultados possíveis. Isso não significa que fenômenos com tais características não possam ser modelados, mas sim que tais modelos são muito mais complexos que os do tipo linear e, certamente, são virtualmente impossíveis de serem construídos em sala de aula por alunos da educação básica, ou mesmo por seus professores, ficando restrito à comunidade científica especializada. São exemplos de modelos não-lineares os que se utilizam para a previsão do tempo atmosférico ou os que descrevem epidemias.

Das discussões surgidas neste ponto do curso, destacaram-se as impressões de professores quanto à real possibilidade de se construir modelos com os alunos em sala de aula, ficando evidente a crença de alguns de que os modelos existentes nos livros didáticos são fruto de atividades de cientistas especializados ou de grandes gênios. O desafio neste momento foi levantar a possibilidade real de se fazer modelagem na escola que resultasse em equações ditas clássicas, como as da Física, por exemplo.

Iniciou-se então a discussão do uso da modelagem no ensino propriamente dito.

3. Por que modelagem matemática no ensino?

O conteúdo abordado neste tópico girou em torno da importância da modelagem no ensino e das dificuldades de tal prática. Chegou-se, no debate, às seguintes conclusões:

1) A modelagem matemática é um importante instrumento pedagógico por que envolve: pesquisa, coleta e análise de dados e atividades em equipe.

2) A modelagem é um processo e não um fim.

3) Aspectos como o relacionamento entre os temas escolhidos e o programa da disciplina, o trabalho em grupo em sala de aula e a dinâmica desses grupos se

constituem em dificuldades que precisam ser consideradas pelos professores que optam pela modelagem.

4) A modelagem no ensino relaciona-se com a necessidade da pesquisa sobre o assunto em estudo, sendo essas tarefas realizadas pelos alunos, que encontram na modelagem uma motivação para estudar.

5) Verifica-se que, enquanto na maior parte do livros didáticos as "fórmulas" (modelos) estão prontas e acabadas, com a modelagem, os alunos podem, eles mesmos, a partir de dados experimentais chegar aos modelos que descrevem o fenômeno em questão.

6) Dos tipos de modelos vistos no curso, os lineares seriam os mais viáveis de serem trabalhados com os alunos do Ensino Médio.

Dentre as dificuldades apontadas pelos professores no uso da modelagem, vale destacar a falta de tempo, a quantidade de conteúdos a serem trabalhados no ano letivo, a falta de materiais e a falta de conhecimentos sobre como fazer modelagem. Feitas estas considerações teóricas, partiu-se para a segunda parte do curso, que consistiu de uma revisão sobre alguns tópicos matemáticos envolvidos na construção de modelos lineares.

4. Construindo modelos de sistemas lineares

Como proposta original do curso, escolheu-se trabalhar na prática com a construção de modelos lineares com crescimento linear. Sabe-se que um fenômeno com tais características possui uma descrição gráfica que, idealmente, é uma reta, ou seja, o gráfico do crescimento linear é uma reta. Vários fenômenos físicos, químicos e biológicos podem ser descritos, em parte, por um sistema linear. São exemplos a variação de temperatura em alguns corpos expostos a uma fonte de calor, a variação do volume de estoques com fluxos de entrada e saída constantes como crescimento populacional e volume de lagos, e mesmo o Movimento Retilíneo Uniforme, o MRU. Uma das principais técnicas para se chegar a estes modelos é a regressão linear simples, que foi a que se passou a discutir no curso.

No caso de um modelo linear, a evolução do fenômeno pode ser descrito como pares ordenados, que, num gráfico de dispersão, é descrito por um conjunto de pontos. Os pontos traçados no diagrama de dispersão podem ficar, neste caso, praticamente sobre uma linha reta, como mostrado na figura 3.

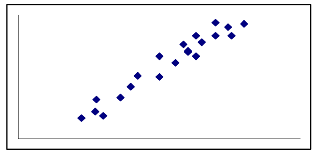


Figura 3: Diagrama de dispersão de modelo com crescimento linear.

Podemos encontrar a equação que mostra y em função de x. A equação da reta tem a forma $y = a + bx$, onde a é o coeficiente linear, isto é, a altura em que a reta corta o eixo y, e b é o coeficiente angular, ou seja, o que determina a inclinação da reta. O problema reside em como chegar a "a" e "b". E para isto existem pelo menos dois caminhos: calculando à mão ou usando o computador. Optou-se no curso em se fazer dos dois modos, principalmente pela alegação de que existem escolas em que os alunos ainda não têm acesso a computadores.

Primeiro modo – Calculando à mão: Para o cálculo dos coeficientes da equação da reta, bastariam dois pontos quaisquer conhecidos e então se utilizaria do quociente das diferenças das coordenas para se achar a inclinação. Geralmente, esse é um assunto de domínio de alunos do Ensino Médio. Porém, no caso da modelagem, como não se trabalha com uma situação ideal, nem todos os pontos "ficam" sobre a reta, o que exige a consideração de médias, onde o conceito de somatório é fundamental. Como dificuldade, alguns professores questionaram este método no sentido de que tal conceito não é de conhecimento comum entre os alunos. A saída neste caso foi sugerir que esta seria uma boa oportunidade de se trabalhar com esta nova notação matemática, que nada mais é do que uma coleção de adições condensadas numa única notação.

Apresentaram-se então as expressões[2] que resultam nos coeficientes, sendo as seguintes:

$a = \bar{y} - b\bar{x}$ e $b = \dfrac{\sum xy - \dfrac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \dfrac{\left(\sum x\right)^2}{n}}$, onde $\bar{y}$ e $\bar{x}$ são os valores médios de y e de x, respectivamente.

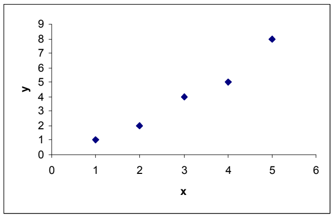
Após a discussão das expressões, seguiu-se a apresentação da seguinte ilustração como exemplo:

[2] Neste ponto, os professores questionaram o fato das expressões serem "fórmulas" prontas para se construir outras fórmulas pela modelagem. No entanto, tais expressões são facilmente demonstráveis a partir de conceitos e operações elementares, e possíveis de serem apresentados a alunos do Ensino Médio.

Ilustração: Na realização de um experimento, os alunos de uma turma escolar obtiveram as seguintes informações:

x	**y**
1	1
2	2
3	4
4	5
5	8

Graficamente:



Como se observa no gráfico, há um crescimento linear, sendo que os pontos podem ser colocados praticamente sobre uma reta. Para se chegar aos coeficientes da equação, primeiro calculam-se *xy*, x^2 e os somatórios. Pode ser usada uma tabela auxiliar para isso.

x	y	xy	x^2
1	1	1	1
2	2	4	4
3	4	12	9
4	5	20	16
5	8	40	25
$\sum x = 15$	$\sum y = 20$	$\sum xy = 77$	$\sum x^2 = 55$

De posse dos valores, é só substituir nas expressões dos coeficientes:

$$b = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}} = \frac{77 - \frac{15.20}{5}}{55 - \frac{(15)^2}{5}} = \frac{17}{10} = 1{,}7 \Rightarrow b = 1{,}7$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{20}{5} = 4$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 4 - 1{,}7.3 = -1{,}1 \Rightarrow a = -1{,}1$$

Logo, o “modelo” que descreve a variação de y em função de x é $y = 1{,}7x - 1{,}1$. De posse do modelo, dado um valor de x que não foi observado na amostra, pode-se “prever” y.

Seguiram-se então algumas discussões sobre a quantidade ideal de “pontos” para a construção do modelo. Isso porque, como visto anteriormente, nem todos os pontos ficam sobre a reta. A conclusão, neste caso é a de que quanto mais “pontos” na amostra, melhor será o ajuste do modelo. A diferença entre os valores observados e modelados se explica porque o modelo é uma aproximação da realidade. Existem erros experimentais. Nenhum modelo, por mais complexo e elaborado que seja, explicará um fenômeno natural em sua completude.

Vários outros modelos foram construídos pelos professores nesta etapa do curso, utilizando-se o cálculo manual dos coeficientes.

Segundo modo – Usando o computador: Como exemplo de modelagem usando o computador, foi apresentada a seguinte ilustração: *Um professor colocou seus alunos num ônibus escolar e os levou para uma auto-estrada. Lá chegando, pediu para o motorista andar sempre na mesma velocidade durante o maior tempo possível. Aos alunos, pediu para anotarem o tempo em todas as placas de quilometragem que vissem pela janela. Os resultados foram os seguintes:*

Hora local	Placa (km)
14:31:10	10
14:34:00	14
14:36:40	18
14:41:50	26
14:47:10	34

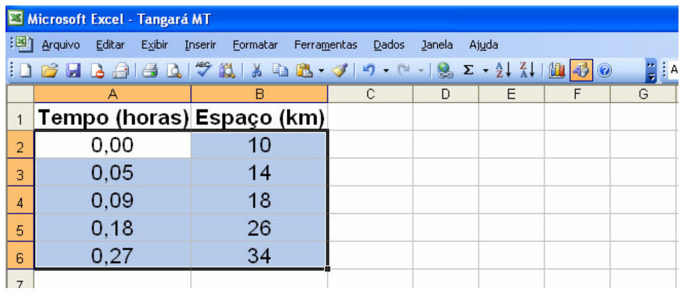
Rearranjando os dados, obteve-se a seguinte tabela:

Tempo (h)	Espaço (km)
0,00	10
0,05	14
0,09	18
0,18	26
0,27	34

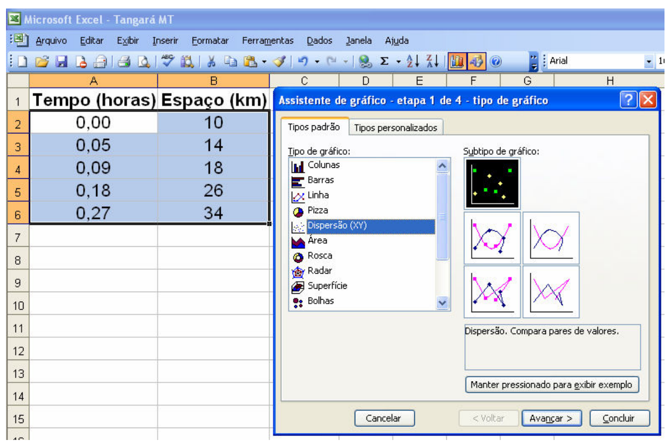
De volta à sala de aula, o professor solicitou a equação da variação da posição do ônibus no tempo.

Mostrou-se então aos professores o caminho da modelagem com o uso de uma planilha eletrônica do programa *Microsoft Office Excel* para a solução do problema e ressaltou-se que outros programas, inclusive não comerciais, fazem o mesmo. A atividade consistiu dos seguintes passos:

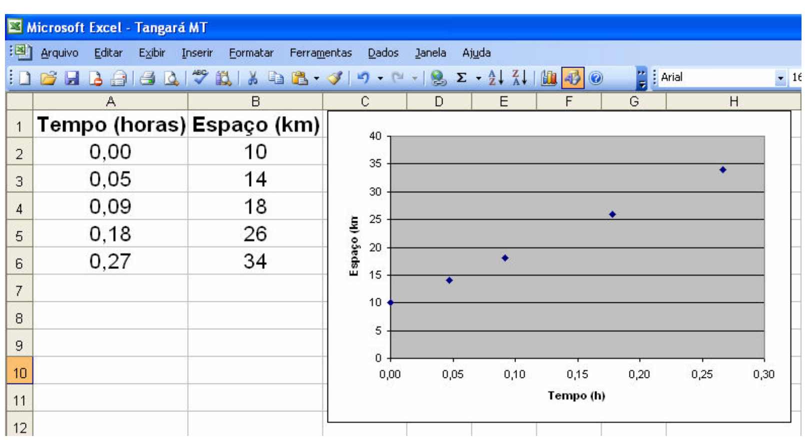
Passo 1: Inserir os dados numa planilha do Excel e selecionar o intervalo de dados.



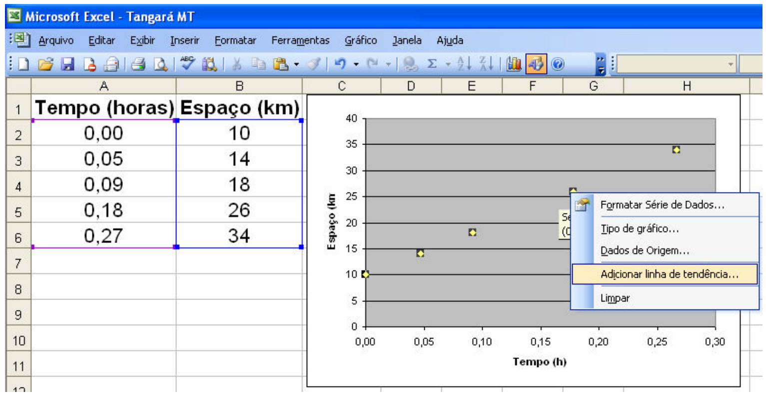
Passo 2: Inserir gráfico e selecionar *Dispersão* (xy)



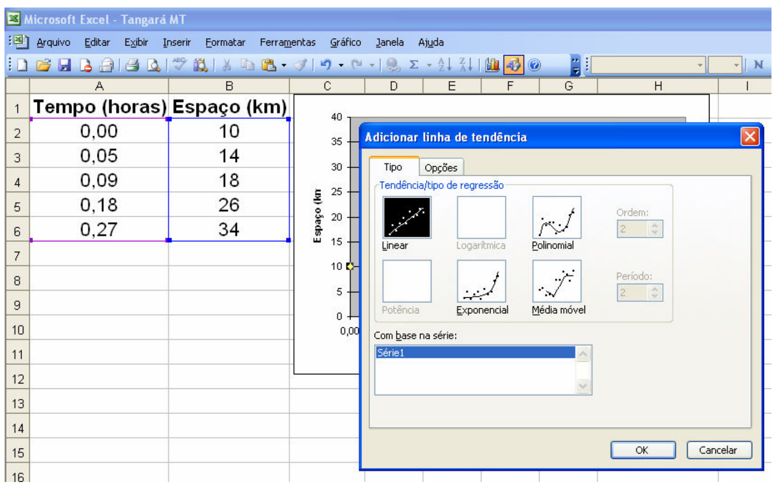
Passo 3: Avançar, avançar e concluir.



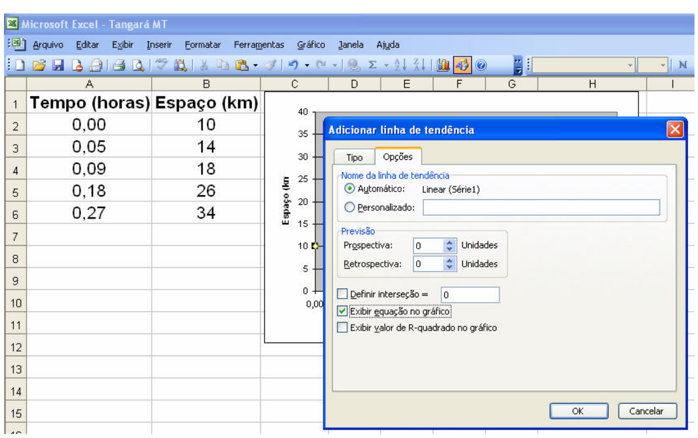
Passo 4: Clicar com botão direito sobre um dos pontos e adicionar linha de tendência.



Passo 5: Escolher o tipo mais adequado: *linear*.



Passo 6: Em *Opções*, escolher *Exibir equação no gráfico*.



Ao clicar em *OK*, o modelo aparecerá no gráfico: $y = 10 + 91x$. E substituindo y e x por s e t, obtém-se a equação $s = 10 + 91t$, que é exatamente a equação do MRU para o caso de um espaço inicial de 10 km e de uma velocidade constante de 91 km/h.

Com este exemplo, os professores puderam constatar que, através da modelagem matemática, é possível construir com os alunos em sala de aula algumas fórmulas existentes em livros didáticos, não sendo necessário oferecê-las prontas.

5. Considerações finais

Com esta experiência, esperava-se que a modelagem matemática fosse vista pelos professores como uma real possibilidade de recurso a ser utilizado em salas de aula. Acreditamos que as discussões realizadas, os exemplos apresentados e a prática realizada contribuíram para isto. A contar pelo entusiasmo dos professores, o curso atingiu parcialmente o objetivo original, possibilitando, se não uma "receita", pelo menos alguns exemplos de situações didáticas possíveis para a utilização da modelagem em sala de aula.

Referências bibliográficas

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática - uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

CRISTOFOLLETTI, A. **Modelagem de sistemas ambientais**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

FERRUZZI, E. C. *et al.* **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia**. In: World Congress on Engineering and Technology Education, São Paulo, 2004.