Contando coelhos: uma introdução à dinâmica populacional

Por que estudar populações ?

- Risco de extinção
- Exploração comercial
- Aumento descontrolado
- Importância ecológica

Tópicos de interesse em dinâmica populacional

- quantos indivíduos temos? técnicas para estimar o tamanho da população (amostragem/estatística)

- quantos teremos?

  i) determinação de fatores que terão influencia nas mudanças na população,

  ii) introdução de fatores que provocarão mudanças pré-especificadas.

População: indivíduos da mesma espécie que:

- Dependam dos mesmos recursos
- Compartilhem um mesmo território
- Estejam submetidos aos mesmos fatores ambientais
- tenham uma probabilidade elevada de interação entre eles

Crescimento Populacional: variação do número de indivíduos no tempo e no espaço

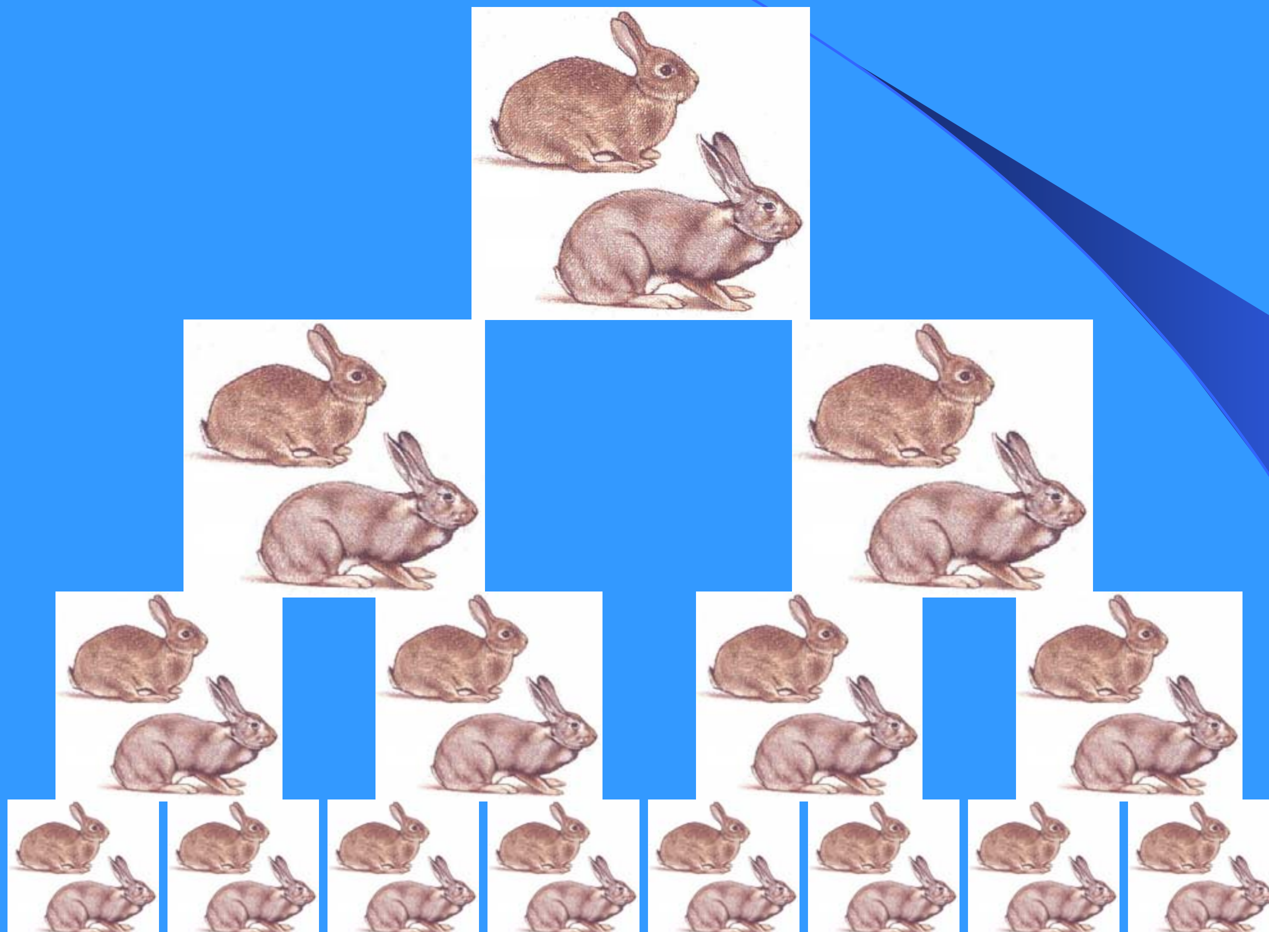
Uma boa pergunta

- Podemos realmente construir um modelo para predizer o crescimento de uma população ao longo do tempo ?

Uma primeira tentativa

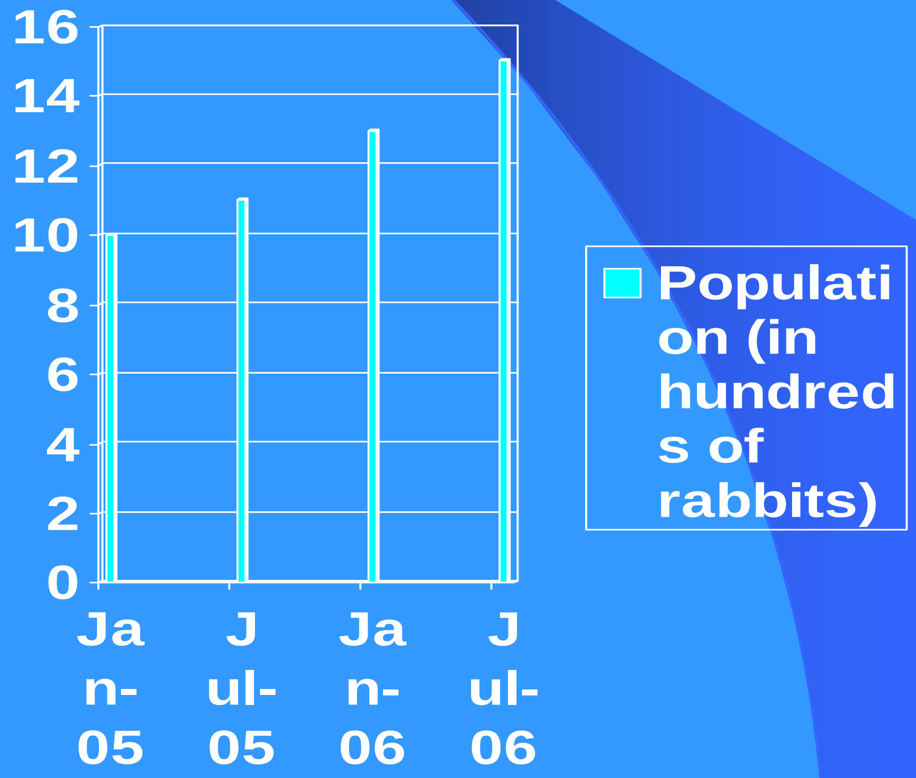
- Depois de um tempo estime novamente a população
- Determine o tamanho da população em um determinado instante
- Deixe o processo continuar, medindo o tamanho da população a diferentes intervalos de tempo
- Grafique esse conjunto de dados e interpole

Seqüência exponencial



Resultados da primeira tentativa

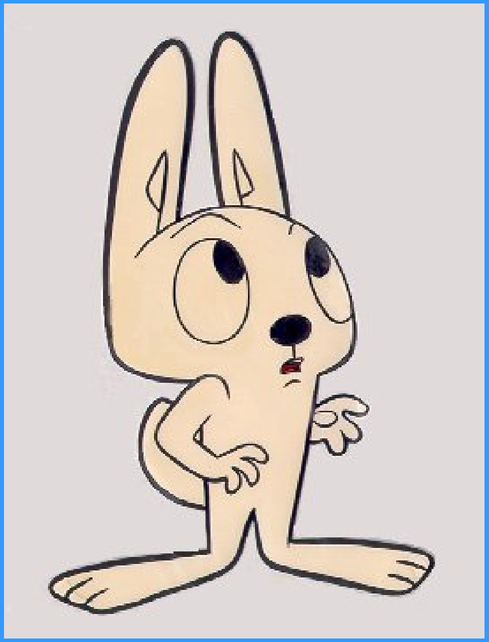
- O gráfico mostra uma população que cresce ao longo do tempo seguindo uma curva exponencial

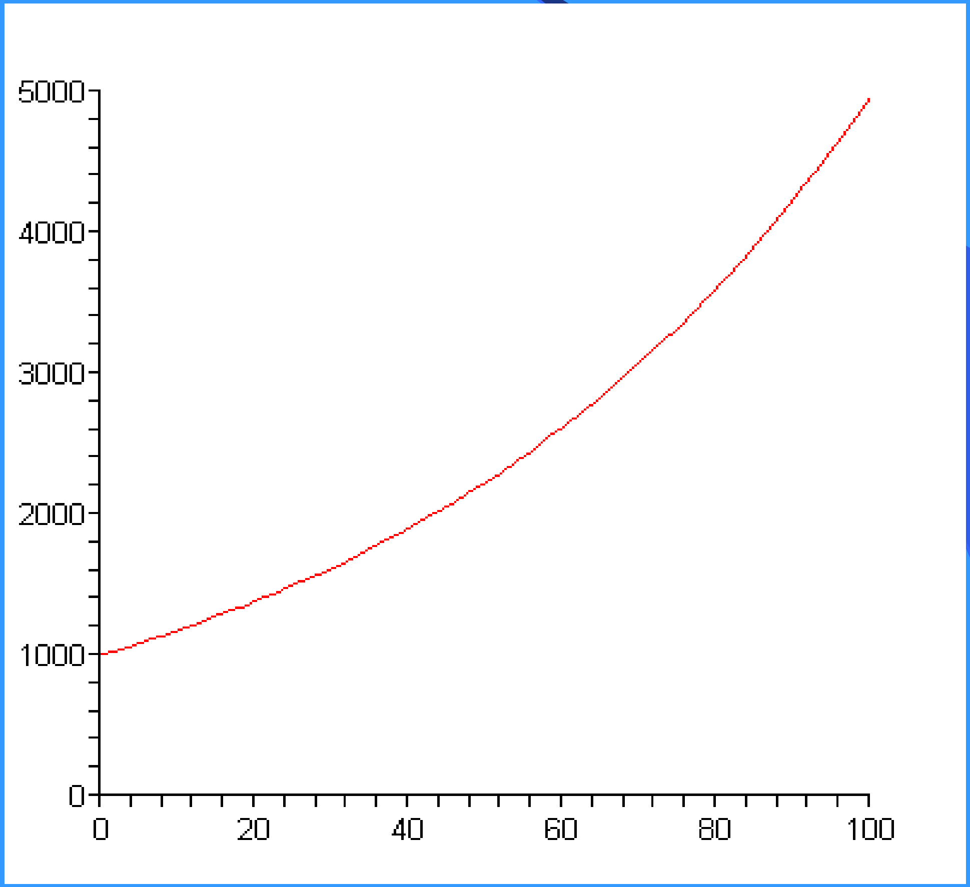


Graficando

- Seja P(t) a variável que representa o tamanho da população em um determinado instante *t*. Aqui t é medida em meses.
- P(0) = 1000 representa a população inicial.
- P(6) = 1100, P(12) = 1221, e P(18) = 1431.

Gráfico de P(t)





Analisando o gráfico

- P(t) pode ser escrito como uma função exponencial:

$$P(t) = 1000\, e^{(.016\, t)}$$

- Agora podemos derivar:

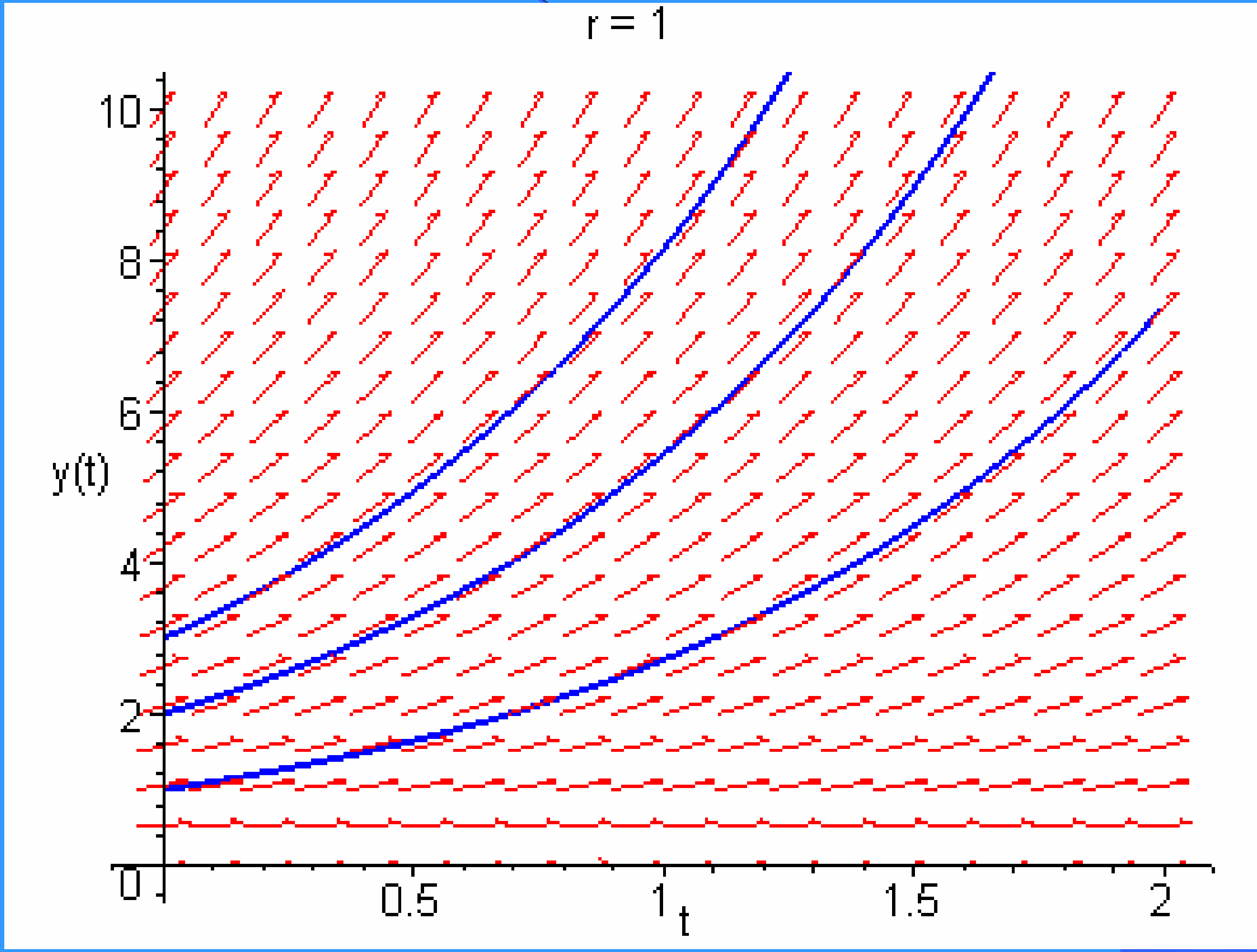
$$\frac{dP}{dt} = 1000 \; * .016\, e^{.016\, t}$$

$$= .016 * 1000 e^{.016 t}$$

$$= .016 \; * P(t)$$

Campo de direções

$$\frac{dP}{dt} = rP$$



A nossa primeira equação diferencial

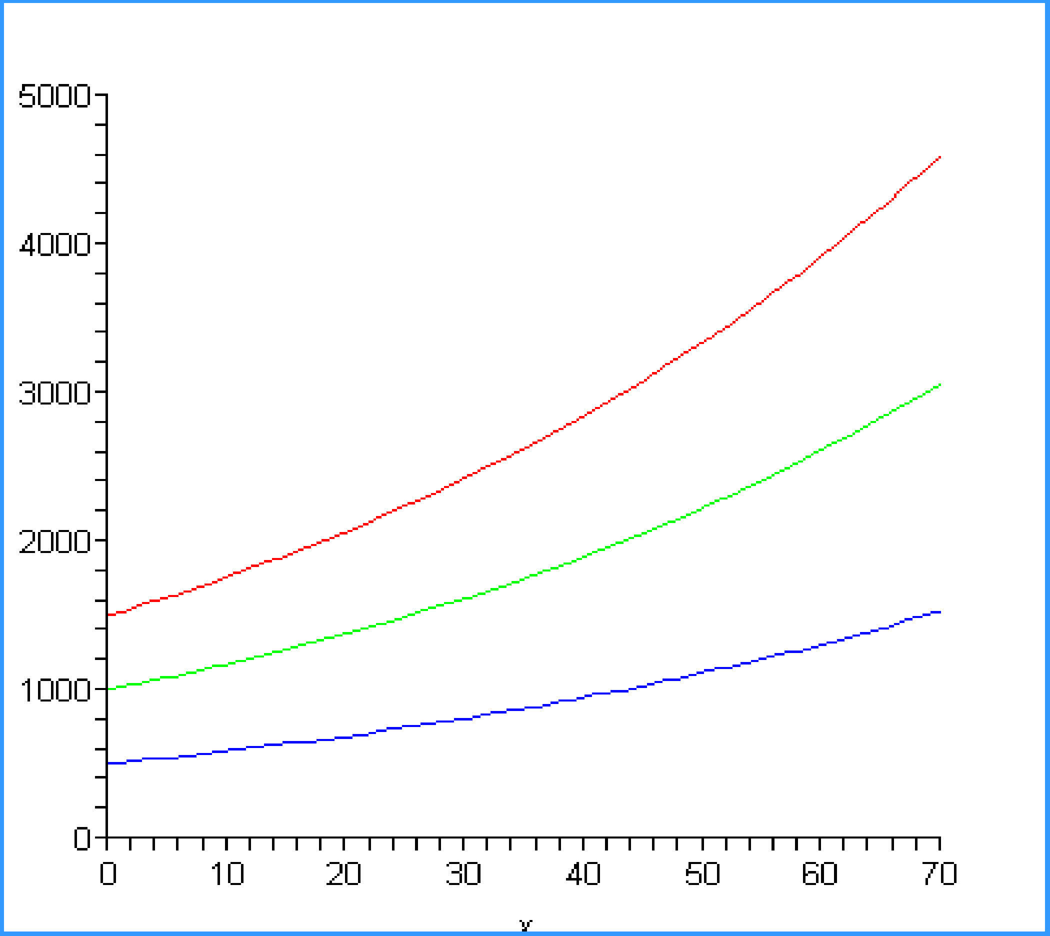
- P(t) satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = .016P(t)$$

- Consideramos a condição inicial:

$$P(0) = 1000$$

Diferentes condições iniciais



Propriedades da equação de crescimento: *P(t)*

- A população cresce com o tempo
- A taxa de crescimento é constante, i.e. 22% por ano
- O modelo ajusta os dados razoavelmente
- A função *P(t)* satisfaz o problema com valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = .016\ P$$

$$P(0) = 1000$$

Inconvenientes com a equação de crescimento

- A população cresce sem limites; i.e. não existe um limitante superior para o tamanho da população
- Poderíamos esperar um crescimento rápido no inicio, para depois moderar se e finalmente atingir um valor para um tempo suficientemente longo

Segunda tentativa

- Modificamos o modelo introduzindo a curva logística, para eliminar as deficiências do modelo anterior

$$\frac{dP}{dt} = h(P)\,P$$

$$h(P) = \begin{cases} \sim r > 0, \text{valores pequenos de } P \\ \text{decresça quando } P \text{ crescer} \\ h(P) < 0 \text{ para } P \text{ grande} \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dt} = (r - aP)P$$

Equação de VERLHUST

- Esta curva resolve o problema do valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

$$P(0) = 1000$$

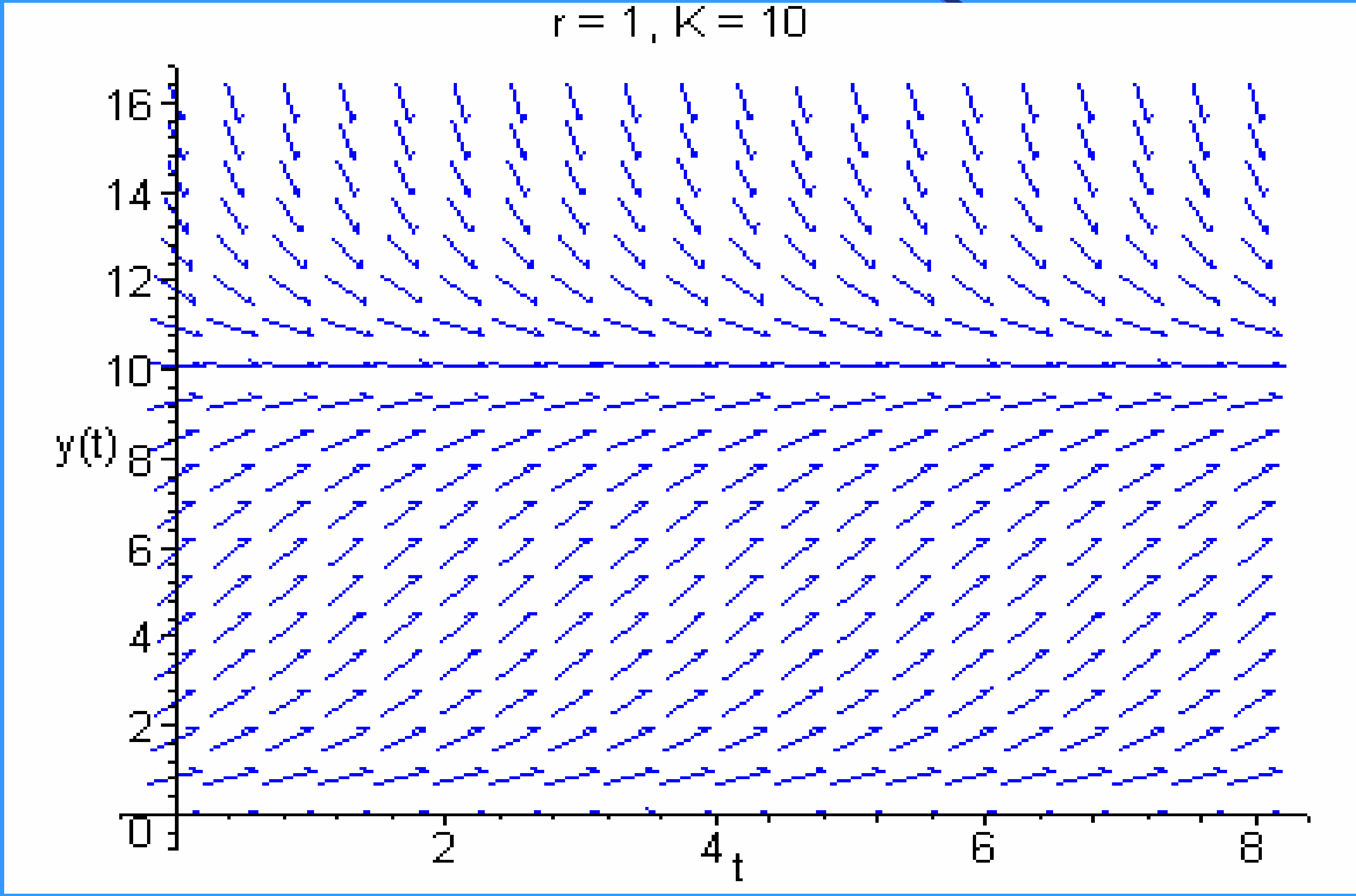
Resolução do problema logístico

- A solução deste problema com valor inicial pode ser escrito como:

$$P(t) = \frac{1000\,K}{1000 + (K - 1000)e^{-rt}}$$

- K é chamado de <u>capacidade critica</u> ou nível de saturação do sistema

Campo de direções



Soluções de equilíbrio

- A nossa equação logística e

$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

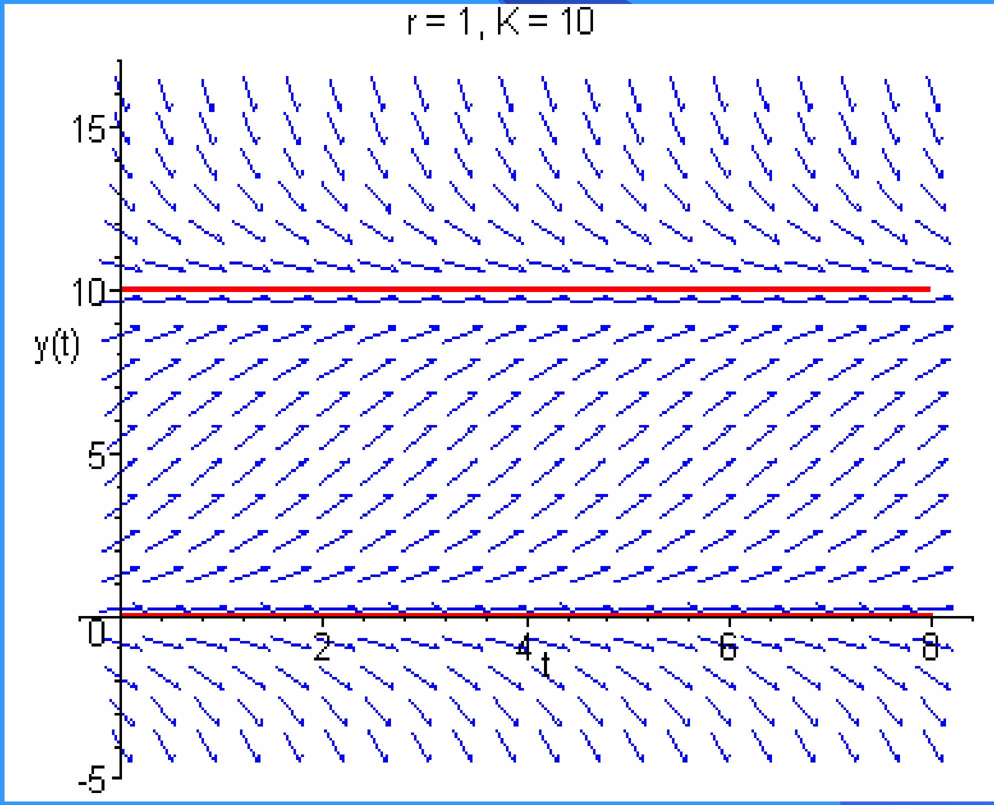
- Duas soluções de equilíbrio :

$$y = \phi_1(t) = 0, \quad y = \phi_2(t) = K$$

- campo de direções, com $r = 1$, $K = 10$

  $P = 0$ is **instável**,

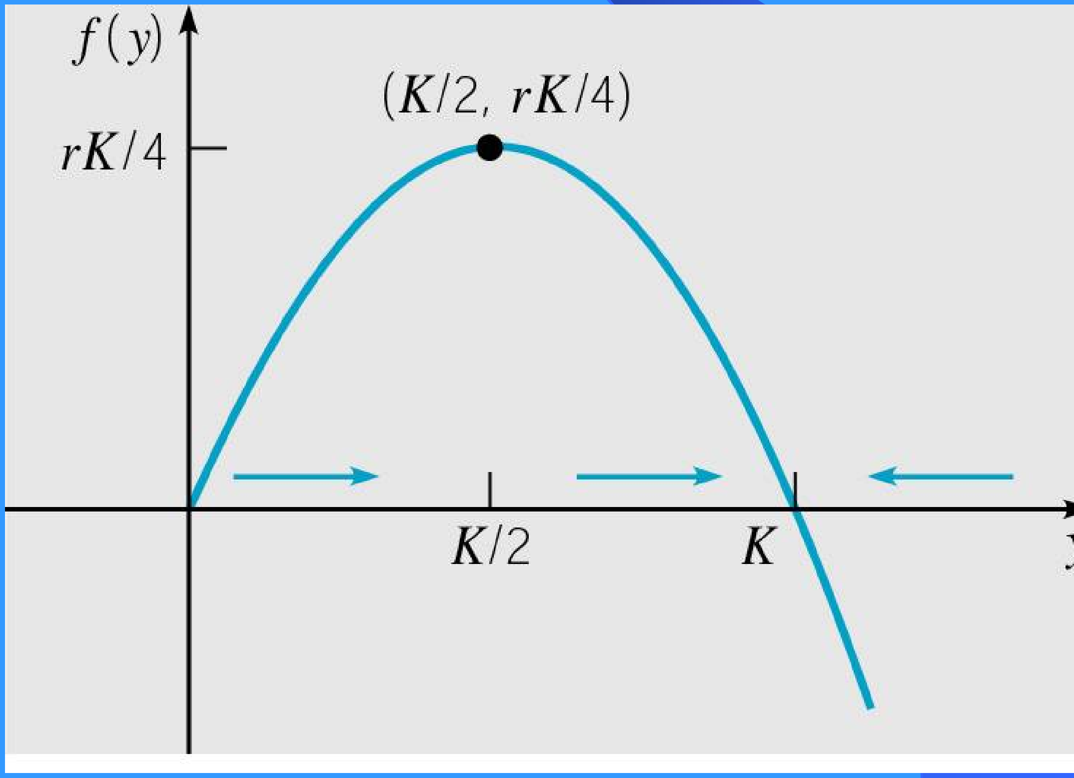
  $P = 10$ e **assintoticamente estável**.



Analise qualitativo

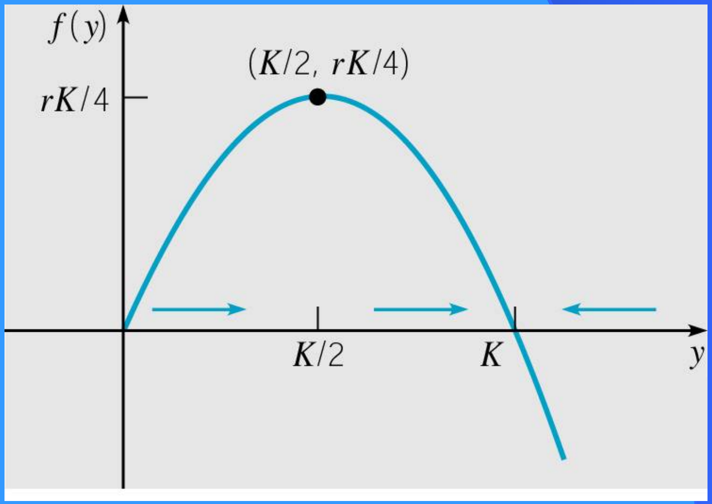
$$\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)P = f(P)$$

$f(P)$ vs. P.

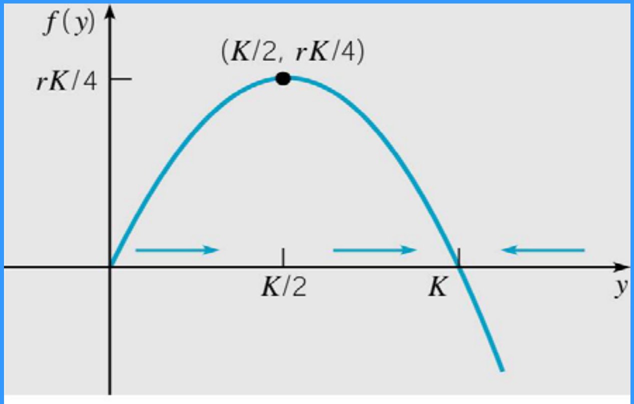


- Observe que $dP/dt > 0$ para $0 < P < K$, e então P e uma função crescente de t (setas para direita $0 < P < K$).
- Similarmente, P e uma função decrescente de t para $y > K$ (setas para esquerda $P > K$).
- O eixo P e chamado de linha de fase.

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad r > 0$$



- Observe que $dP/dt \cong 0$ quando $P \cong 0$ ou $P \cong K$ onde P e relativamente achatada e pula P varia de 0 a K.



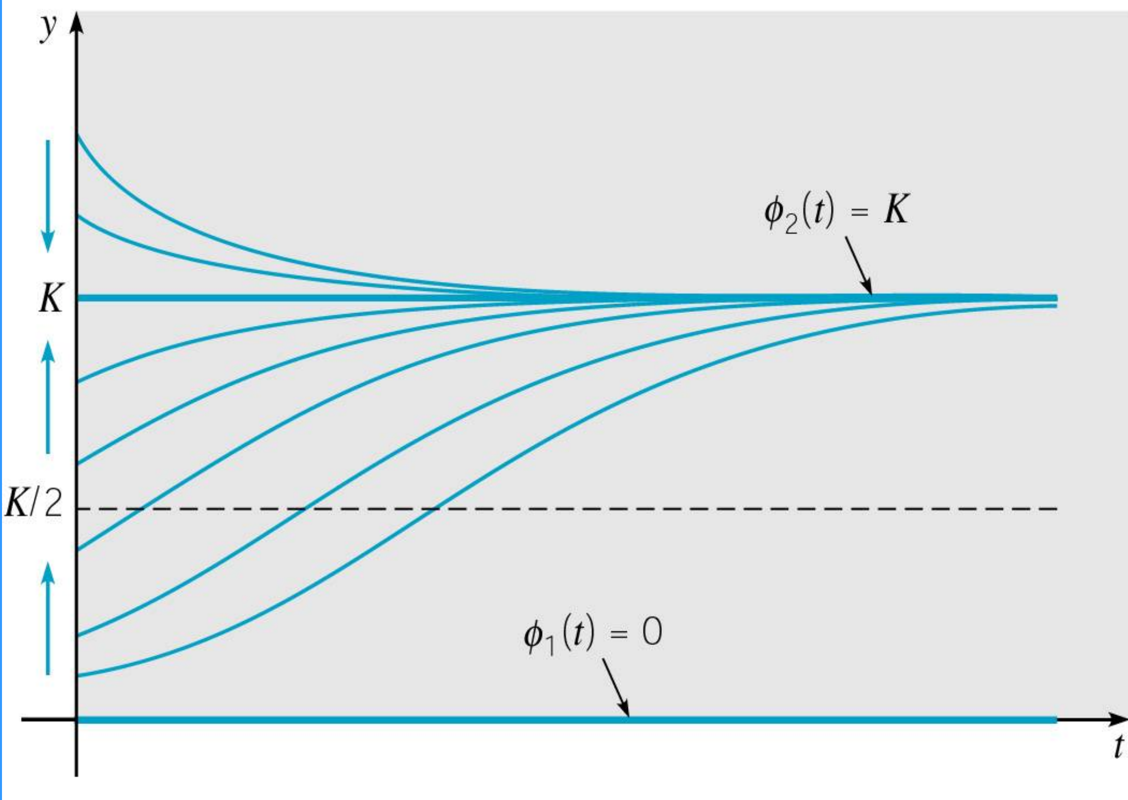
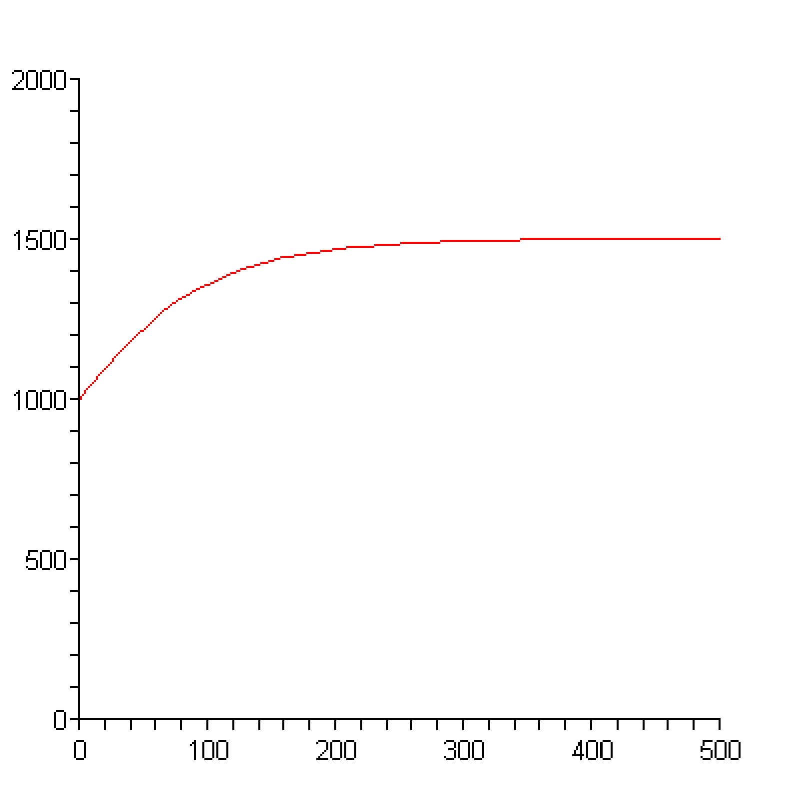
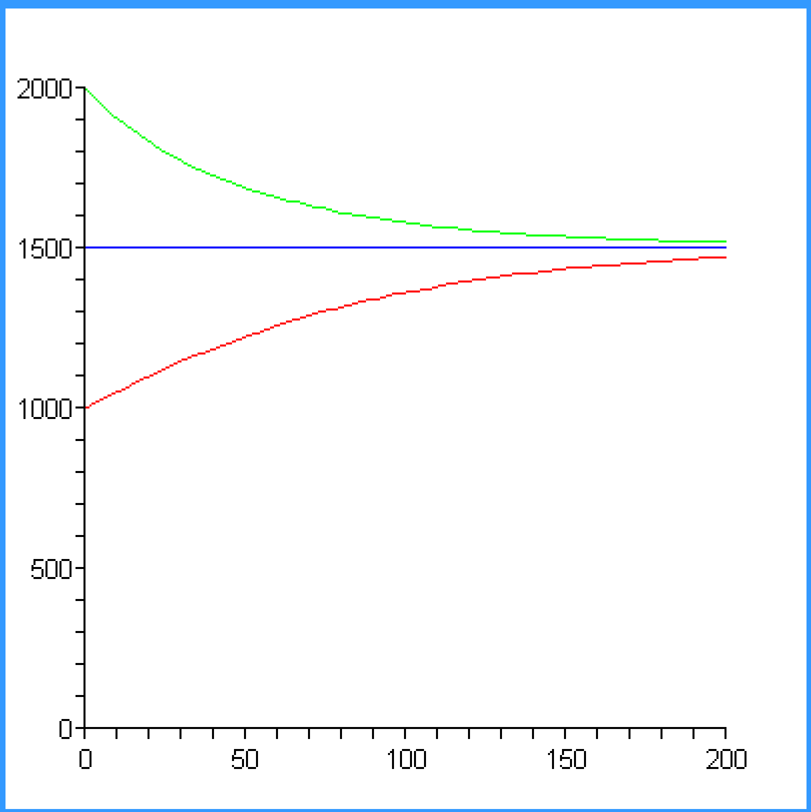


Gráfico da função logística



- O tamanho da população cresce rapidamente no início e depois se atenua
- O limitante é aproximadamente 1500

Populações iniciais diferentes



- Quando a população começa com um valor superior a 1500 coelhos, o tamanho da população diminui
- A população se aproxima a 1500 na medida que o tempo transcorre

Resolução da equação logística

1) A equação logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - N/K\right)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dN}{rN\left(1 - N/K\right)}$$

$$\Rightarrow t = \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{rN\left(1 - N/K\right)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{r}\int_{N_0}^{N} \frac{KdN}{N\left(K - N\right)}$$

2) Temos:

$$x = \log\left(N\left(K - N\right)\right)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{K - 2N}{N\left(K - N\right)} dN$$

$$\Rightarrow dx = \frac{K}{N\left(K - N\right)} dN - \frac{2N}{N\left(K - N\right)} dN$$

$$\Rightarrow \frac{K}{N\left(K - N\right)} dN = dx + \frac{2N}{N\left(K - N\right)} dN$$

3) Substituindo:

$$t = \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{rN\left(1 - N/K\right)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{r}\left\{ \int_{\log(N_0(K-N_0))}^{\log(N(K-N))} dx + \int_{N_0}^{N} \frac{2dN}{K - N} \right\}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{r}\left\{ x\Big|_{\log(N_0(K-N_0))}^{\log(N(K-N))} - 2\log\left(K - N\right)\Big|_{N_0}^{N} \right\}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{r}\left\{ \log\frac{N\left(K - N\right)}{\left(K - N\right)^2} \right\}_{N_0}^{N} = \frac{1}{r}\left\{ \log\frac{N}{\left(K - N\right)} \right\}_{N_0}^{N} = \frac{1}{r}\left\{ \log\frac{N\left(K - N_0\right)}{N_0\left(K - N\right)} \right\}$$

4) Resolvemos para $N(t)$:

$$e^{rt} = \frac{N\left(K - N_0\right)}{N_0\left(K - N\right)} \Rightarrow N_0\left(K - N\right)e^{rt} = N\left(K - N_0\right)$$

$$\Rightarrow KN_0e^{rt} = N\left(K - N_0 + N_0e^{rt}\right)$$

$$\Rightarrow N\left(t\right) = \frac{KN_0e^{rt}}{K - N_0 + N_0e^{rt}}$$

Estado estacionário ou Ponto Fixo

- Para uma equação diferencial da forma

$$\dot{x} = f(x)$$

- x_0 é um Ponto Fixo $\Leftrightarrow f(x_0) = 0$
- A equação logística tem dois pontos fixos, N=0 e N=K
- Os pontos fixos são denotados por x^*

Estabilidade

- É o ponto fixo estável?
- *I.e.* se você se desloca levemente de x_0, $x(t)$ volta para x_0?
- Se sim x_0 é Estável, senão, x_0 é dito Instável.

Análise da estabilidade (linear)

- Considere o ponto fixo x_0 e uma perturbação ε. Assumimos que:

$$\left(\left|\varepsilon\right|\right) << \left|x_0\right|$$

- Consideremos a expansão de f na vizinhança de x_0:

$$f\left(x_0+\varepsilon\right)= f\left(x_0\right)+\varepsilon\frac{df}{dx}\left(x_0\right)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\left(x_0\right)+\vartheta\left(\varepsilon^3\right)=$$

$$0 \qquad +\varepsilon\frac{df}{dx}\left(x_0\right)+\text{neglect}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{d\left(x_0+\varepsilon\right)}{dt}=\frac{d\varepsilon}{dt}=\varepsilon\frac{df}{dx}\left(x_0\right)$$

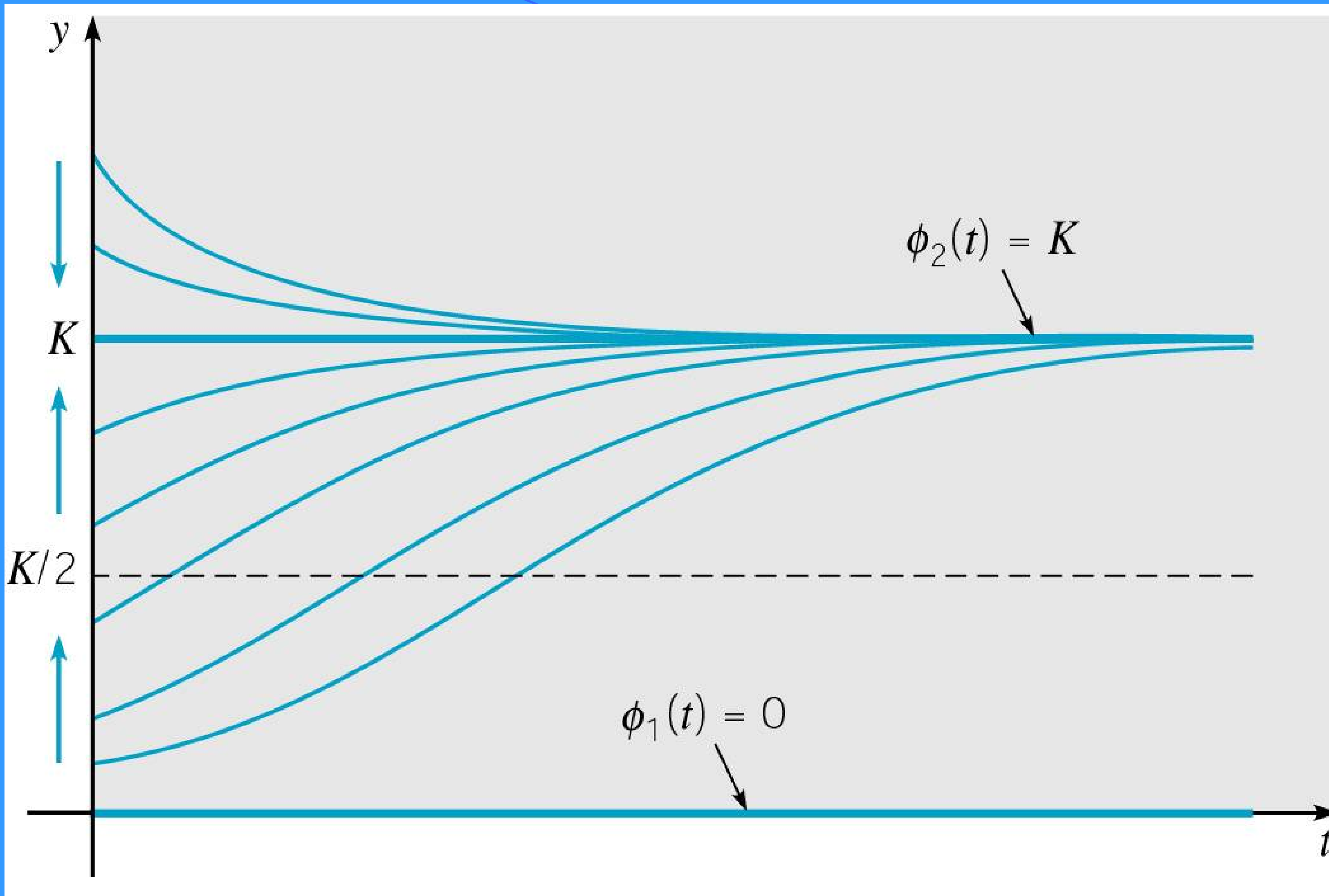
$$\Rightarrow \varepsilon\left(t\right)=\varepsilon_0 e^{t\frac{df}{dx}\left(x_0\right)}$$

- Assim , se

$$\frac{df}{dx}(x_0)\begin{cases} >0 \text{ então } \varepsilon(t) \text{ cresce exponencialmente } \Rightarrow \text{ INSTÁVEL} \\ <0 \text{ então } \varepsilon(t) \text{ converge assintóticamente para } 0 \Rightarrow \text{ ESTÁVEL} \\ =0 \text{ então } \varepsilon(t) \text{ depende de termos de maior ordem} \Rightarrow \\ \qquad\qquad\qquad \text{CONDICIONALMENTE ESTÁVEL} \end{cases}$$

Propriedades da solução

- Se a população começa com um valor acima da capacidade crítica ($P_0 > K$), a população cai até atingir esse valor
- Se a população começa embaixo da capacidade critica ($P_0 < K$), a população cresce até atingir esse valor, independente do valor inicial
- Se a população começa como o valor de saturação ($P_0 = K$), permanece constante no tempo
- $P(t) = cte$. Esta propriedade é conhecida como <u>solução assintoticamente estável</u>.



y
K
K/2
t
$\phi_2(t) = K$
$\phi_1(t) = 0$

Valores limiares

- Agora introduziremos o conceito de valor limiar: o mínimo requerido para garantir a sobrevivência da população, e será denotado por T

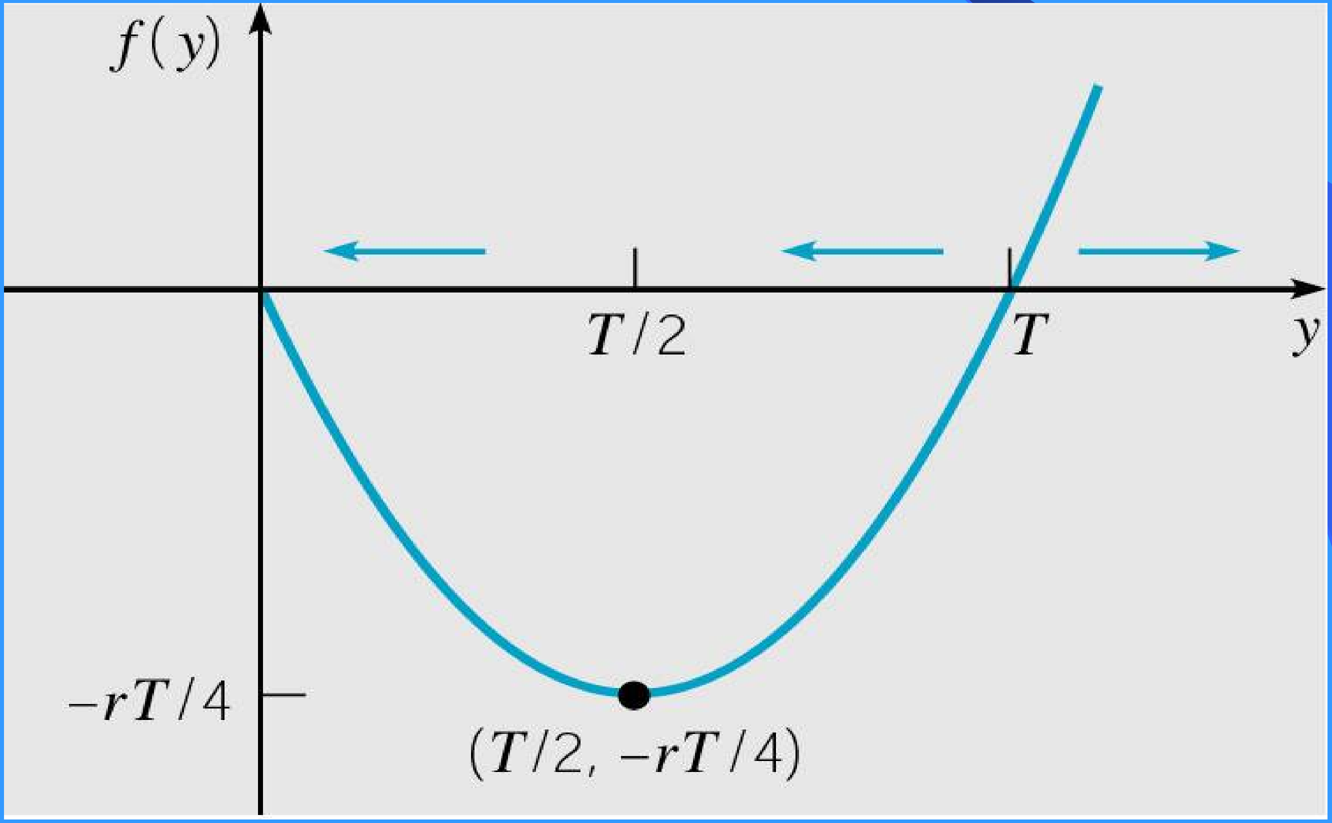
PVI com limiar

- Consideremos o seguinte problema:

$$\frac{dP}{dt} = -r\left(1 - \frac{P}{T}\right)P$$

$$P(0) = 1000$$

O gráfico de $f\,(y)$.

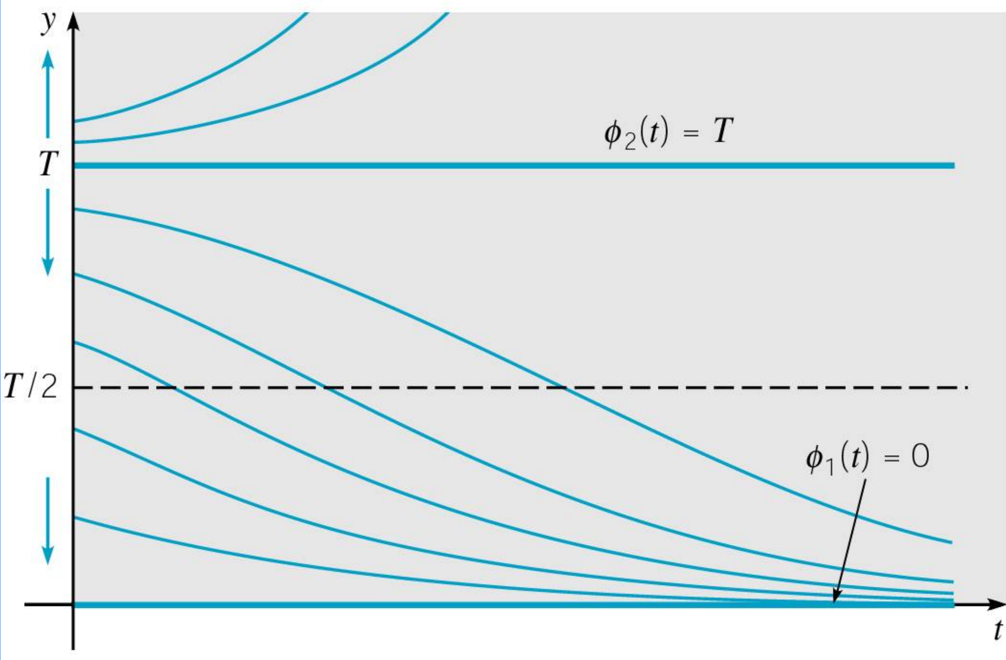


- T é o valor limiar y_0, para o qual a população morre ou cresce sem limite dependendo da localização de y_0 em relação a T.
- Pode ser mostrado qua a solução da equação com valor limiar

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y, \quad r > 0$$

está dada por

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}$$



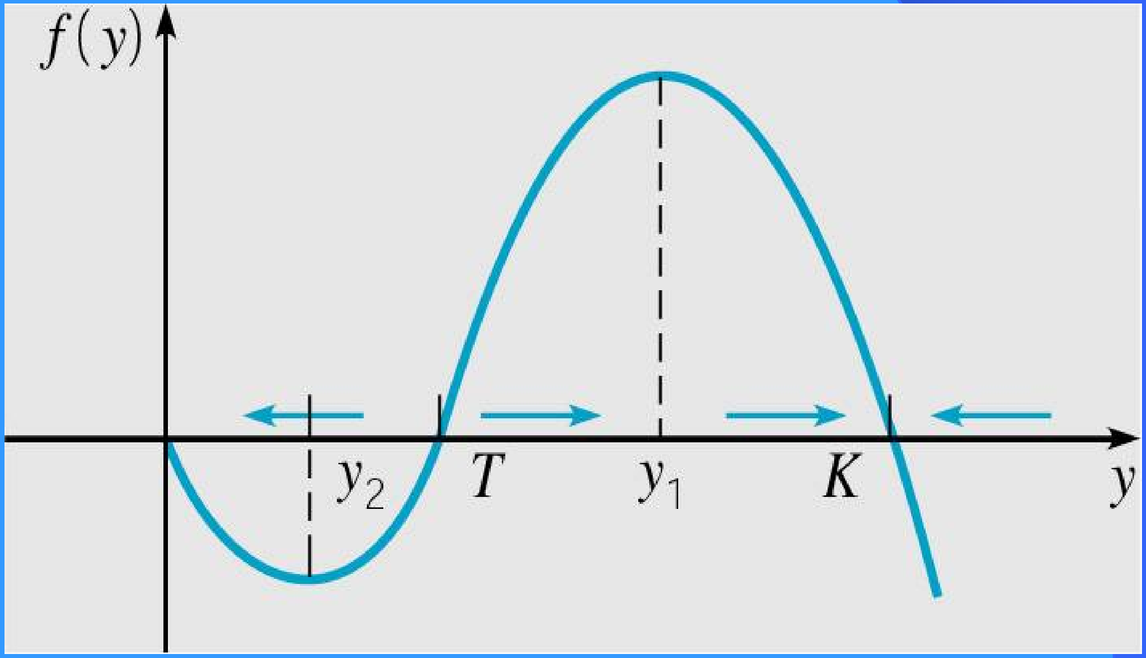
Deficiências do modelo

- Se a população começa abaixo do limiar a população tende a desaparecer e se começa com o valor do limiar não cresce nem decresce
- Assim é necessária estabelecer uma nova relação entre os valores da população e de T e K

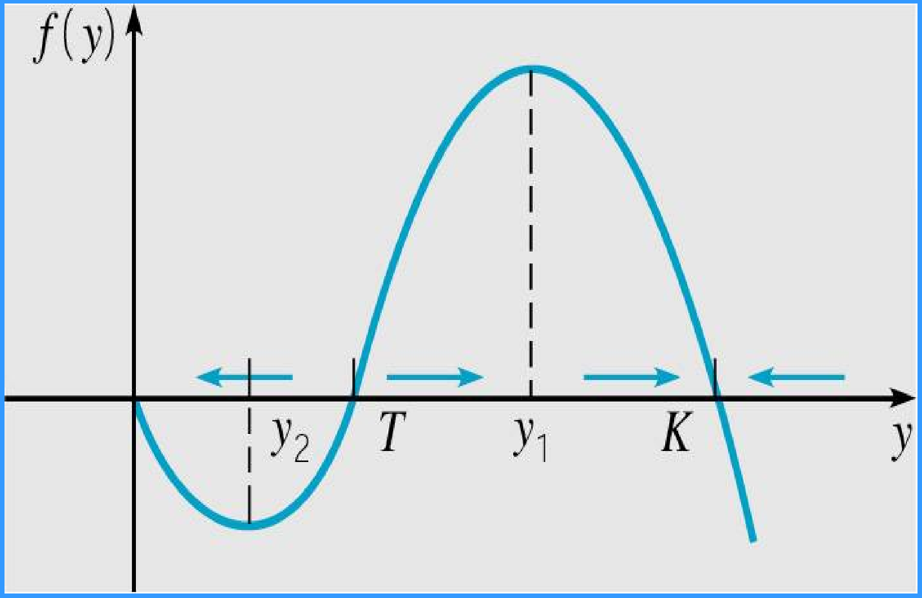
- Para evitar crescimento ilimitado para $y > T$, consideremos a seguinte modificação da equaçõa logística:

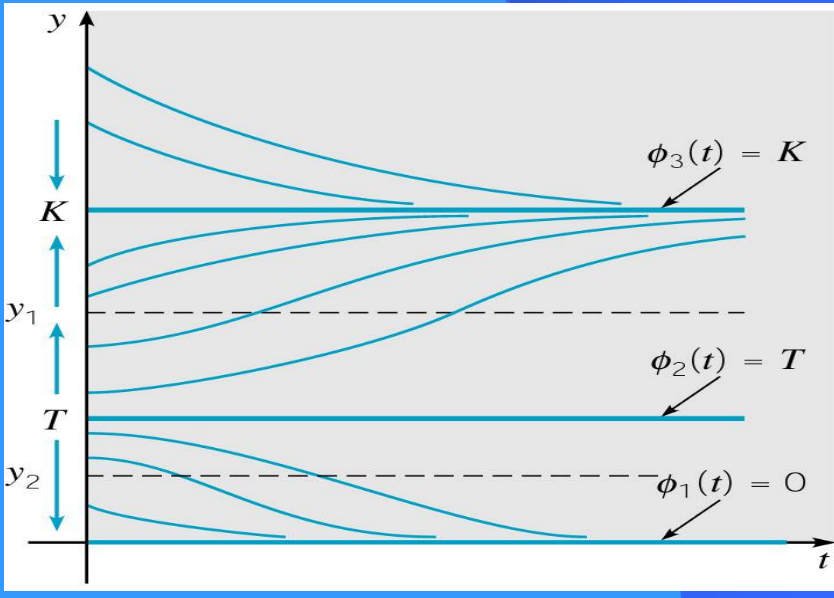
$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1-\frac{y}{T}\right)\left(1-\frac{y}{K}\right)y, \quad r > 0 \text{ and } 0 < T < K$$

- O gráfico da função do lado direito $f(y)$ está dado por.



- T é o valor crítico para y_0, no qual a população morre ou cresce para o valor K, dependendo da localizaçõa de y_0 em relaçõa a T.
- K é a capacidade crítica
- Note que: $y = 0$ e $y = K$ são soluções de equilíbrio estáveis, entanto $y = T$ é uma solução de equilíbrio instável.





Um modelo híbrido

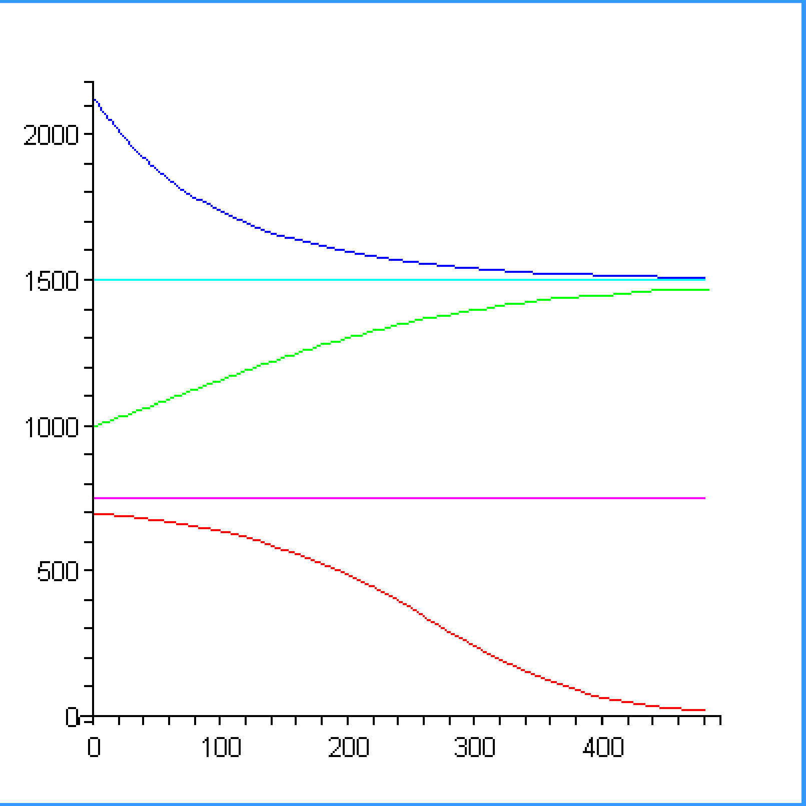
- Consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = -r\left(1-\frac{P}{T}\right)\left(1-\frac{P}{K}\right)P$$

$$P(0) = 1000$$

usando T= 750 e K= 1500 e r = .016.

Gráfico da soluções



- O modelo mostra um comportamento adequado para qualquer valor inicial

Solução para o problema híbrido

- Temos três valores para os quais a solução converge:

$$y = 0, \qquad y = T, \qquad y = K$$

- y = 0 é um valor de equilíbrio quase-estável, y = *T* é instável e y = *K* é estável

Vantagens do modelo híbrido

- O modelo leva em consideração a capacidade crítica e o valor limiar
- a população permanece limitada para qualquer valor inicial
- O máximo valor para a população é o ponto de saturação

Referências

William E. Boyce and Richard C. DiPrima (2005). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (eighth edition), pp 78 – 88.