

Matemática Aplicada

Uma Introdução à Modelagem Matemática
e
à Simulação Numérica

MATEMATICA APLICADA

Curso de Especialização em Matemática Aplicada e Computacional

Prof. Daniel N. Kozakevich
Sala: 308,
Departamento de Matematica
Fone: 33319221-R 4308
e-mail: daniel@mtm.ufsc.br

Horario de Aula: 13:30-15:00
Horario de atendimento:

"nunca se deve perder de vista a grande verdade do aforismo antigo: *matematicus purus, purus asinus*". (Sebastião e Silva)

Muito poucos lêem e ouvem e são esses poucos que passam os recados adiante para a posteridade (Alfredo Marques)

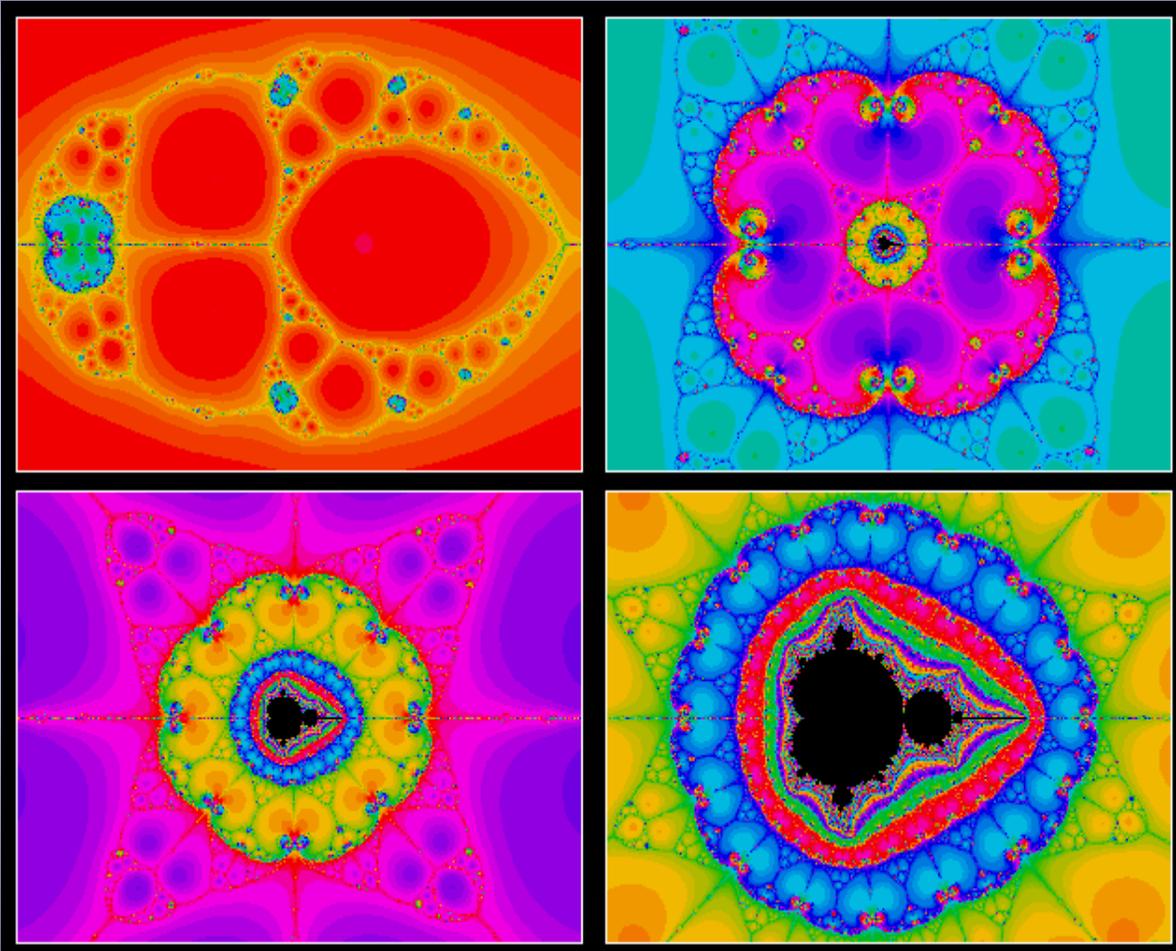
Já conheceis a história. Contudo , iremos repetí-la. Todas as coisas já foram ditas; mas, como ninguém escuta, força é recomeçar sempre. (André Gide)

Galileu, “O livro da Natureza está escrito com a linguagem das matemáticas”,

The scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living.

Henri Poincare*

A Matemática no mundo atual



Em quantas partes podemos dividir a matemática ?



Foundations
Combinatorics
Number Theory and
Abstract Algebra
Geometry and
Topology
Analysis:
Functional Analysis
Real Analysis
Complex Analysis
Numerical Analysis
Differential Equations
Applications:
Physics, and other
Sciences & Engineering
Computers, Information
Probability and
Statistics
History and General
Layman's Guide to the
Math Subject Areas

This image Copyright (c) 1998-1-15
Trevor Puzio, trevio@math.uci.edu

O Que É Interdisciplinaridade?

- uma disciplina é "algo comparativamente auto-contido e isolado do domínio da experiência humana, o qual possui sua própria comunidade de especialistas com componentes distintos tais como metas, conceitos, habilidades, fatos, habilidades implícitas, e metodologias".
- SBPC – Florianópolis - 2006 - Semeando Interdisciplinaridade

- Interdisciplinaridade, por outro lado, é "a união dos componentes distintos de duas ou mais disciplinas" na pesquisa ou educação, conduzindo a novos conhecimentos que não seriam possíveis se não fosse esta integração.
- A multidisciplinaridade ocorre quando as disciplinas trabalham lado a lado em distintos aspectos de um único problema. A interdisciplinaridade ocorre quando as disciplinas se integram e colaboram entre si.

A Importância da Interdisciplinaridade

- é impossível a um único cientista abranger qualquer coisa que seja maior que o seu minúsculo campo de especialidade
- à medida que o conhecimento explode e se fragmenta, torna-se impossível para um indivíduo compreender os diversos fragmentos.

A Profissão Interdisciplinar

- : *O pesquisador Interdisciplinar: está "Em Cima do Muro", ou seja, não se aprofunda nas duas especialidades envolvidas, mas consegue manter-se em contato com ambas e integrar os conhecimentos de cada uma*
- coordenar e integrar as tarefas dos membros da equipe disciplinar

Engenharia Matemática

- (a) a fundamentação matemática/física precisa;
- (b) a formulação do modelo em termos matemáticos;
- (c) a solução teórica e/ou numérica do modelo;
- (d) a interpretação da solução e sua verificação em termos científicos ou tecnológicos.

Why study modeling?

“So, there are two strategies available: specialized training and mixed training. The first optimizes prestige, the second progress. One can satisfy his ego or his curiosity, but not both. The mixed strategy scientist may be criticized (justly!) for incompetence by both pure theorists and pure data biologists, as he proceeds to make satisfying advances in the science.”

Stephen Fretwell, 1972

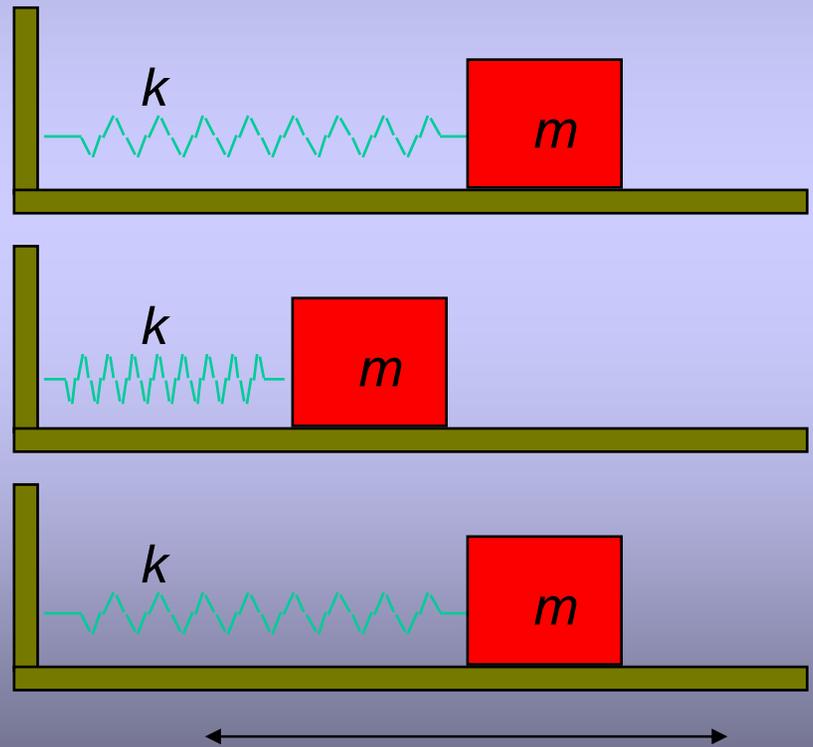
*Populations in a Seasonal
Environment*

Exemplo: Movimento Armonico Simples



Mola
Horizontal

- Se esticamos uma mola com uma massa presa no extremo e logo a soltamos, a massa oscilara (sem fricção).
- Esta oscilação e chamada de **Movimento Armonico Simples.**



- Em qualquer instante temos que $F = ma$ (*Lei de Newton*)

- Neste caso (*Lei de Hooke*)

$$F = -kx$$

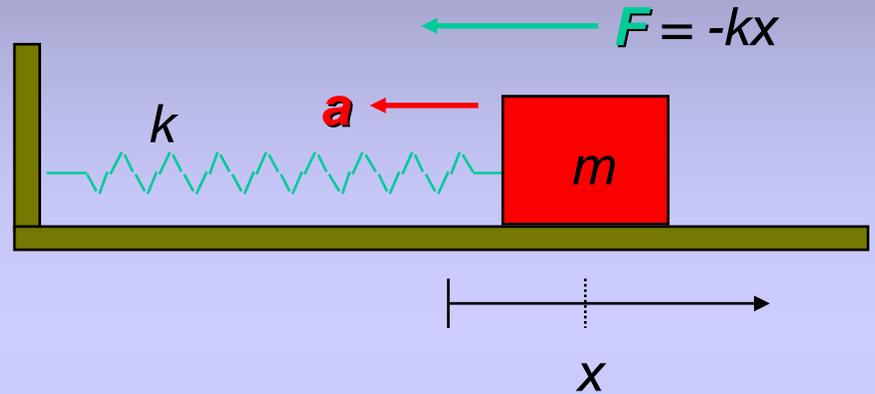
e $ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

- Assim $-kx = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

⇒ $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$



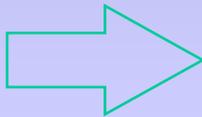
uma equação diferencial para $x(t)$!



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Se definimos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

onde ω é a frequência

$x = A \cos(\omega t)$ é uma solução

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

funciona, assim deve ser uma solução!



“O que um matemático aplicado deve conhecer respeito ao problema que quer resolver e no mínimo necessário para não ser punido (Gelfand)”

- Um ***Problema*** é uma dificuldade que impede que uma vontade seja concretizada.
- Solucionar ***Problemas*** exige a capacidade de criar adequadas representações da realidade (***modelos***) e, com ajuda delas, encontrar um ***algoritmo de solução*** que explique como remover ou superar tal dificuldade

- A construção de um *algoritmo de solução* é profundamente influenciada pelo modelo utilizado.
- *Solucionar problemas* é, portanto, uma arte de *criar* ou escolher *modelos*, e com eles *construir algoritmos* que *funcionem* na prática e sejam *rápidos* o *suficiente* para ainda encontrarem o problema quando oferecerem a solução.

Tópicos

- 1: introdução à modelagem
 - o que é modelagem matemático?
- 2: sistemas dinâmicos discretos
 - relações recursivas
 - modelos logísticos
 - dinâmica populacional
- 3: álgebra matricial
 - problemas de autovalores
 - diagonalização de matrizes

4: modelagem com matrizes

- Cadeias de Markov

5: modelos contínuos

- Interpolação e extrapolação

6: modelagem com equações diferenciais

- equações diferenciais ordinárias
- modelo presa-predador
- equações diferenciais parciais

7: resolução de equações ordinárias

- Problemas com valor inicial
- Problemas com valor de fronteira

8: simulação numérica

– Métodos numéricos, algoritmos

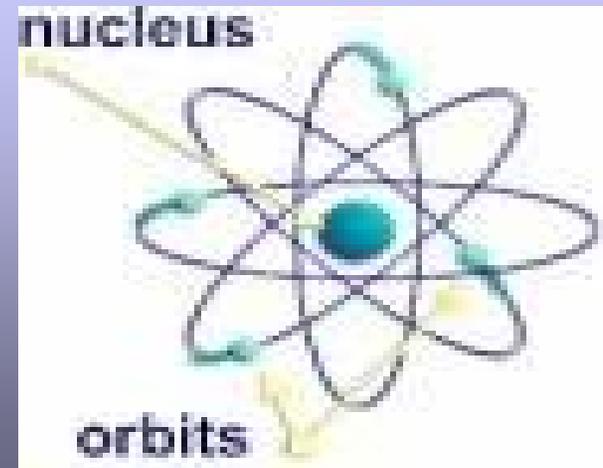
9: implementação computacional

– Linguagens de computação, software

O que é um modelo?

algo que imita características mais relevantes da situação que está sendo estudada: forma, brinquedo, protótipo, modelo matemático

Finalidade: o resultado final de um modelo consiste em observar seu desempenho quando aplicado aos problemas para os quais foi projetado.



Definição:

- o esforço de representação de processos físicos, econômicos, biológicos, através de um formalismo matemático, o qual permite que se faça previsões ou interpretações em relação ao universo que se pretende modelar".
- ... são compostos os modelos matemáticos, que consistem num conjunto de registros e parâmetros que traduzem as características e atributos do mundo real. Para que melhor se possa analisar uma determinada realidade, se constrói um modelo que ajude a entendê-la e a decodificá-la.

definições

- ... as modelagens são um produto dessa sofisticação teórica da ciência e o seu objetivo é constituir objetos mais simples com as ferramentas da matemática, em particular as equações diferenciais, visando à sofisticação de instrumentos que permitam não apenas uma compreensão adequada de um determinado fenômeno e de suas tendências no tempo, mas também a formulação de programas de intervenção que possam ordenar, organizar, mudar, prever e mesmo prevenir, no que diz respeito à sua ocorrência e seus desdobramentos, fenômenos, sejam eles físicos, naturais, sociais ou culturais.

- **“A arte é a mentira que nos ajuda a ver a verdade” - Picasso**
- **O modelo é uma representação simplificada da realidade, embora distorcido e "errado", que revele alguns componentes essenciais de uma realidade complexa.**
- **Modelar nos ajuda a separar o essencial do supérfluo**
- **Sem detalhes secundários, um bom modelo pode permitir a análise profunda que é obscurecido sendo feito de uma outra maneira .**



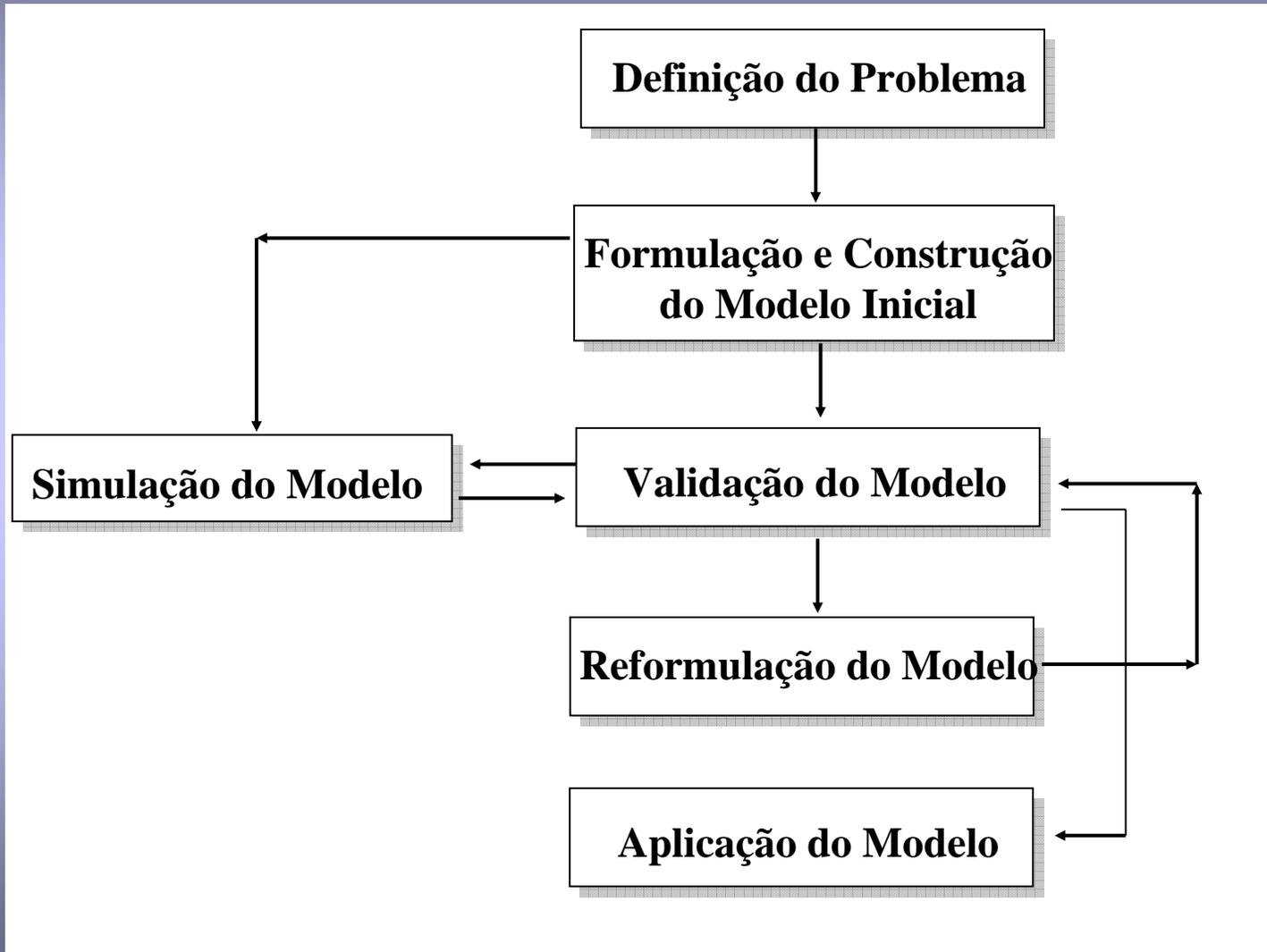
Modelos matemáticos

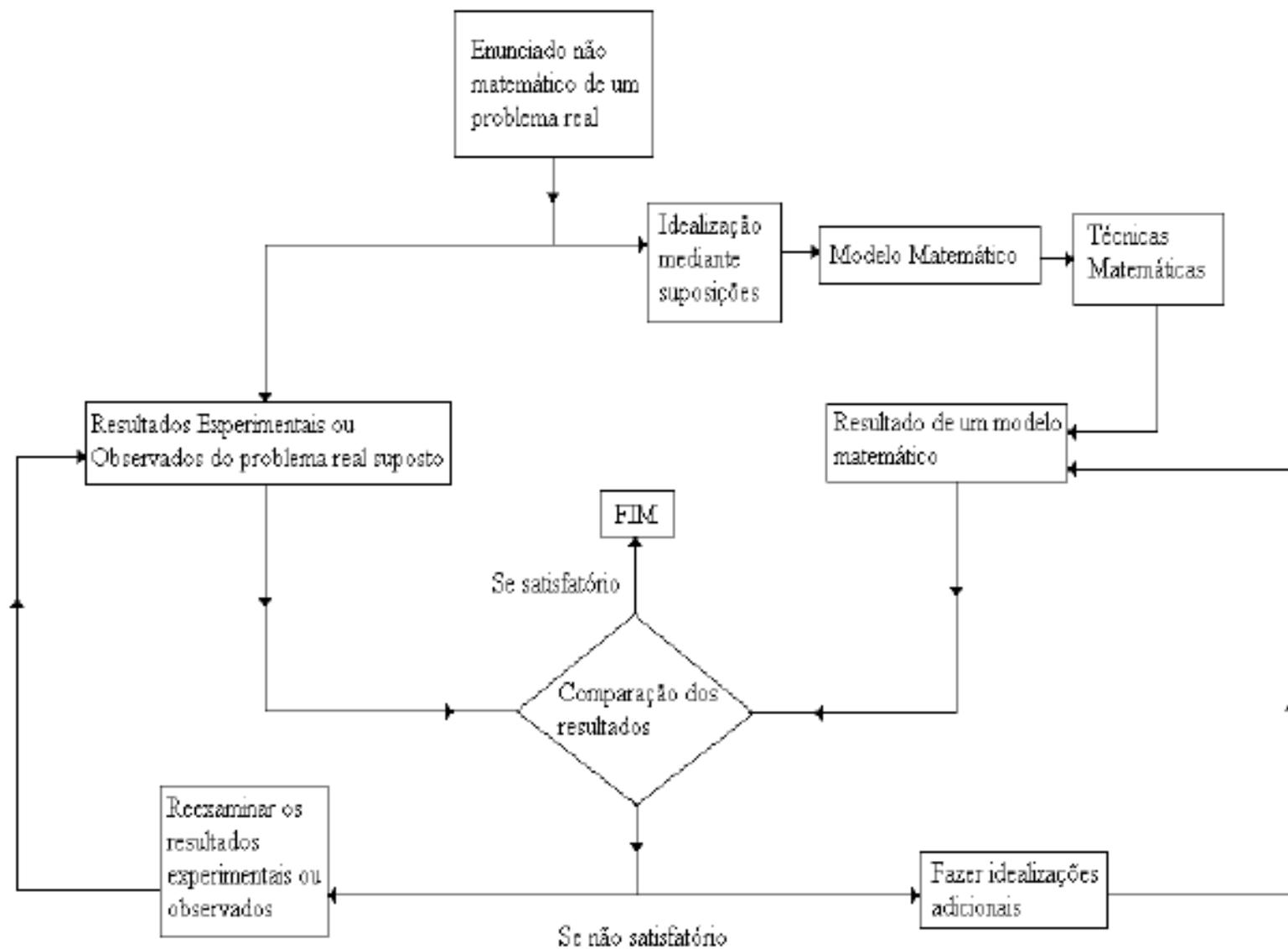
Definição:

- uma abstração,
- uma construção simplificada,
- uma estrutura matemática relacionada com uma parte da realidade e criada para uma finalidade particular

Construindo o modelo

1. observe as características fenomenológicas do problema
 - qual é o problema ? Identificação do problema
2. Formule o problema
 - O que desejamos saber?
3. Esboce o modelo
 - Selecione as variáveis e as "ignoráveis"
 - Faça suposições
4. É útil?
 - Podem ser obtidos os dados necessários ?
 - É possível realizar predições?
5. Teste o modelo
 - Faça predições que possam ser verificadas com os dados
6. Modifique o modelo





Tipos de modelos

➤ Modelos dinâmicos e estáticos

- Dependentes do tempo e independentes do tempo

➤ Modelos discreto e contínuos

- Equações em diferenças, fórmulas recursivas
- Equações diferenciais

➤ Modelos determinísticos e estocásticos

- Processos randômicos
- Alta complexidade, grande número de variáveis

➤ Modelos lineares e não lineares

- Estabilidade, caos

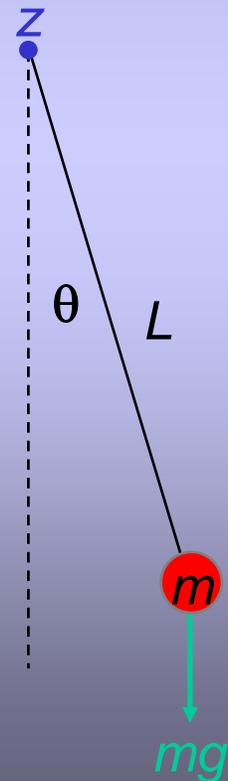
O que temos como objeto de estudo ...

- Sistemas dinâmicos discretos
- Sistemas estocásticos discretos
- Modelos estatísticos
- Modelagem matricial
- Cadeias de Markov
- Modelos empíricos
- Modelos contínuos
- Equações diferenciais
- Modelos populacionais
- Método das diferenças finitas
- Otimização e pesquisa operacional
- Transformadas integrais
- ...

Exemplo: Pendulo Simples



- Um pendulo e construído suspendendo uma massa m no extremo de uma corda de comprimento L .
Achar a freqüência angular das oscilações para pequenos deslocamentos.



Aproximações: $\sin \theta$ e $\cos \theta$ para pequenos valores de θ

- A representação de Taylor para $\sin \theta$ e $\cos \theta$ na vizinhança de $\theta = 0$ e:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad \text{e} \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Então se $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$

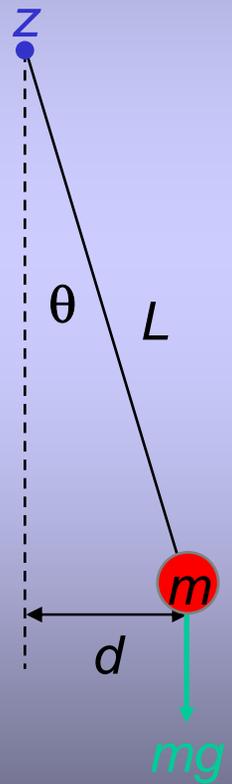
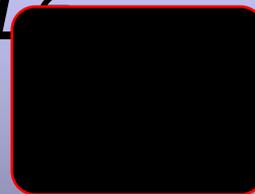
- Lembrando que o torque devido as forças da gravidade em torno do eixo (z) e $\tau = -mgd$.

$d = L \text{ sen } \theta \approx L\theta$ para pequenos valores de θ

assim $\tau = -mgL\theta \rightarrow -mgL\theta = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$

- sendo $\tau = I\alpha$, $I = mL^2$

$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ where



Equação diferencial para movimento harmônico simples

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Não linearidade

- O que é não linear ?
- O que é uma ciência não linear ?
- O que é um sistema dinâmico?
O que é um espaço de fases?
O que é um grau de liberdade?
O que é uma transformação?
O que são transformações que envolvem fluxos (equação diferencial)?
O que é um atrator?
O que é caos?
O que é sensibilidade a condições iniciais?

O que e não linear?

- *Linearidade:*

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ e } f(ax) = af(x);$$

se x e y são zeros de f , i.e., $f(x) = 0$ e $f(y) = 0$ então $f(x+y)=0$ e $x+y$ e outro zero de f ; de fato temos infinitos zeros $f(ax+by) = 0$. (Princípio de superposição)

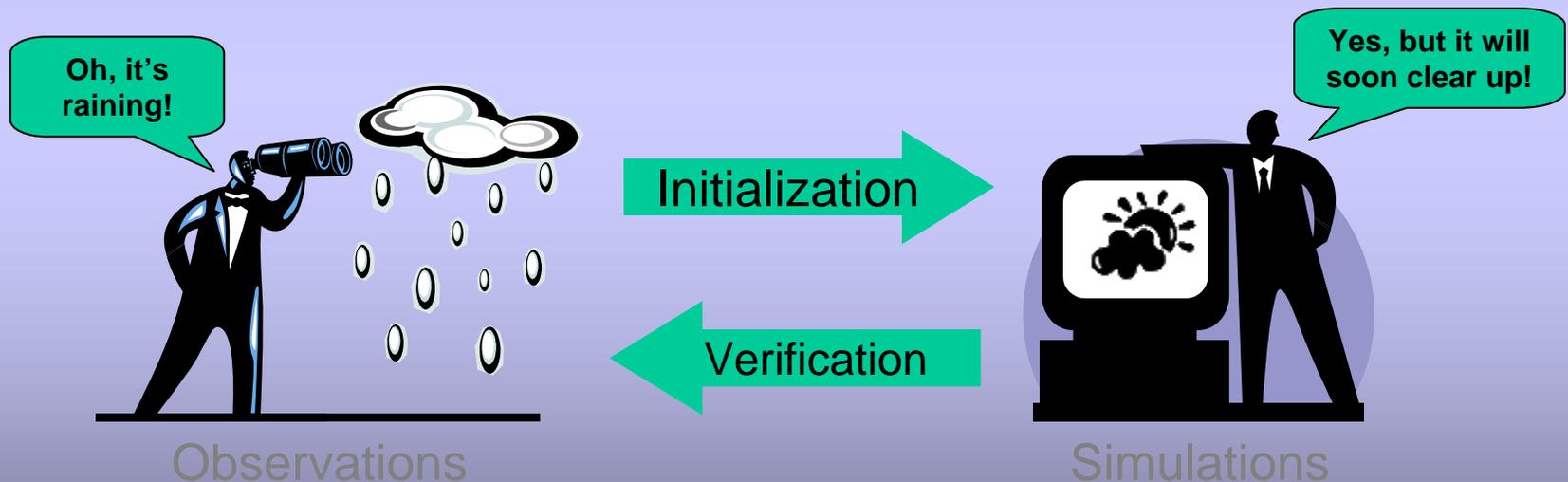
- Se f for não linear, cada zero deve ser obtido com não pouco esforço

O que é uma ciência não linear?

1. “designar a uma ciência: Não Linear e equivalente a dizer que um zoológico e um lugar com animais não humanos” (Stanislaw Ulam).
2. Comportamento estranho: bifurcação, caos, e solitons.
3. O mundo real é não linear. O todo não pode ser obtido como a soma das partes

Conceitos básicos de modelagem climática ou como fazer o prognóstico do tempo?

- Observando a atmosfera
- Rodando modelos numéricos em computadores



Predição numérica do tempo

- Devemos resolver um conjunto de equações não lineares acopladas as equações que descrevem processos atmosféricos como precipitações, ventos, etc
- As não linearidades requerem um tratamento numérico cuidadoso
- Um conjunto de observações são necessárias para inicializar e conferir o modelo de prognóstico

O que é um sistema dinâmico?

- Um sistema dinâmico consiste de um espaço de eventos ou espaço de estado, cujas coordenadas descrevem o estado do sistema a cada instante; e uma regra ou lei que determina todas as variáveis de estado num instante posterior a partir dos valores atuais das mesmas variáveis. Matematicamente, um sistema dinâmico está definido por um problema de valor inicial.

- Determinísticos (um único estado próximo possível para cada estado inicial),
- “estocásticos” ou “randômicos” se existem varias possibilidades para o estado seguinte pertencentes a uma distribuição probabilística (moeda: tem dois possíveis estados (cara e coroa) com igual probabilidade a partir de cada estado inicial
- Discretos: $z_1 = f(z_0)$
- Contínuos: $z(t) = \text{phi}(t, z_0)$

O que é um espaço de fase?

- Um espaço de fase é o conjunto dos estados possíveis de um sistema dinâmico

O que é uma transformação?

- Uma transformação é simplesmente uma função $f(z)$, definida sobre um espaço de fase que fornece o próximo estado, (a imagem), do sistema em função do estado atual (frequentemente é utilizada a notação $z^* = f(z)$)
- Uma iteração de uma transformação consiste em aplicar a transformação repetidamente sobre a aplicação anterior
- $z_n = f(z_{n-1}) = f(f(z_{n-2})\dots) = f^n(z_0)$
(esta seqüência define a trajetória de um sistema dinâmico com condição inicial z_0 .

O que são transformações que
envolvem fluxos (equação
diferencial)?

O que é um atrator?

- O estado no qual um sistema dinâmico eventualmente se estabiliza. Um atrator é um conjunto de valores no espaço de fase para o qual o sistema migra com o tempo (se função contínua) ou por iterações (se função discreta). Um atrator pode ser um único ponto-fixo, uma coleção de pontos regularmente visitados, uma alça, uma trajetória complexa, ou um número infinito de pontos. Ele não precisa ser uni- ou bidimensional, e pode ter tantas dimensões quanto o número de variáveis que influenciam o seu sistema.



O que é caos?

- 'caos' manifesta-se em sistemas determinísticos, através de uma dependência sensível nas condições iniciais, o que inviabiliza previsões de longo alcance.
- um sistema dinâmico que tem um grande número de atratores (possibilidade infinita)

O que e sensibilidade as
condições iniciais?