Equações Diferenciais Ordinárias

Uma revisão

Definição de EDO

- ***Definição :*** “Uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma ou várias derivadas da função incógnita.” (Kreyzig).

- EDO´s são equações que possuem apenas derivadas em relação a uma única variável

Notação

- Existem diferentes notações para derivadas.
- Livros com diferentes interesses usam diferentes notações.
- As vezes a escolha da uma determinada notação facilitará a resolução.

- Quocientes de derivadas são úteis para o método de separação de variáveis.

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$$

- Linha, concisa

$$y', y'', y'''$$

- Pontos, usada por Newton para derivadas em relação ao tempo

$$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$$

Exemplos

$$y' = \cos x$$

$$y'' + 4y = 0$$

$$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$$

Exemplos

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$$

$$x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{dy}{dx} + 2e^x \frac{d^2 y}{dx^2} = (x^2 + 2) y^2$$

Aplicações

- Engenharia, física, biomatemática, economia, etc.
  - Circuitos elétricos
  - Mecânica dos fluidos
  - Vibrações
  - Modelos populacionais
  - etc.

Definição : **Uma equação que envolve derivadas até ordem n, é chamada de equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n e pode ser escrita na forma:**

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

$$a \le x \le b$$

Definição: **A solução da equação é qualquer função *y* = *f*(*x*) que é definida em [a,b] e tem n derivadas neste intervalo e que satisfaz a equação diferencial.**

Edo´s versus Edp´s

- Edo´s são equações diferencias onde a função incógnita depende apenas de uma única variável.
- Edp´s são equações diferenciais onde a função incógnita depende de duas o mais variáveis.
- Uma boa familiaridade com Edo´s é necessária para começar a considerar a resolução de Edp´s.

Equações diferenciais parciais

→São requeridas e de fronteira.

→Edp´s lineares de primeira ordem são muito semelhantes com as Edo´s.

→Edp´s de segunda ordem descrevem um grande número de problemas reais.

→**Descrevendo a função do potencial em um campo de forças conservativo – (Laplace)**

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}=0$$

- Elíptico

→**Descrevendo o perfil de temperatura – o problema de condução de calor**

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial t}$$

- Parabólico

→**Descrevendo a vibração de uma membrana.**

→

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}$$

- Hiperbólicas

Ordem de uma equação diferencial

- A ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada que aparece na equação.
- As equações de primeira ordem podem ser escritas como:

$$F(x, y, y') = 0$$

or

$$y' = f(x, y)$$

Soluções de uma Edo

- Uma solução de uma Edo é uma função, $y(x)$, que satisfaz a equação diferencial em algum intervalo, $a<x<b$.

- Uma forma de conferir se uma função e solução da equação diferencial é substituir na equação.

Substituição

- Considere a equação diferencial:

$$xy' = 2y, \text{ for all } x$$

- Desejamos saber se $y = x^2$ é uma solução (substituindo a ambos lados da equação):

$$y' = 2x$$

$$\text{lado esquerdo}: \quad xy' = x(2x) = 2x^2 = 2y$$

$$\text{lado direito}: \quad 2y$$

$$\therefore \quad y = x^2 \qquad \text{e}' \text{ a solução}$$

Soluções implícitas

- As vezes não é conveniente mostrar a solução da equação diferencial implicitamente como *y=h(x)*. A forma *H(x,y)=0* pode ser mais adequada

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (y > 0)$$

é a solução para

$$yy' = -x \qquad -1 < x < 1$$

A forma mais simples de uma EDO é

$$y' = f(x)$$

onde f é contínua para $a < x < b$.

A solução geral desta equação é:

$$y(x) = \int f(x)dx + c$$

com constante c determinada por $y(x_0) = y_0$

Constantes de Integração

- Lembre se de usar a constante de integração

$$y' = \cos x$$

$$\Rightarrow\ y = \sin x + c$$

- Solução geral, *y = sin x + c*
- Solução particular, *y = sin x + 1*,

  y = sin x – 2, etc.

Exemplo – Decaimento Radioativo

- Suponha que estamos modelando o decaimento de um lixo radioativo. Inicialmente temos 2 gr de radium ($_{88}Ra^{226}$) .
- A equação que modela o processo é:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

- Onde *y(t)* é a quantidade de radium presente e *k* é uma constante (-1.4×10^{-11} sec^{-1})

- Usando um pouco de cálculo temos que:

$$y(t) = ce^{kt}$$

  - Isto é um solução geral.
- Uma solução particular é obtida usando a condição inicial *y(0) = 2*.

$$y(0) = ce^{0} = 2$$

$$\Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow \; y(t) = 2e^{kt}$$