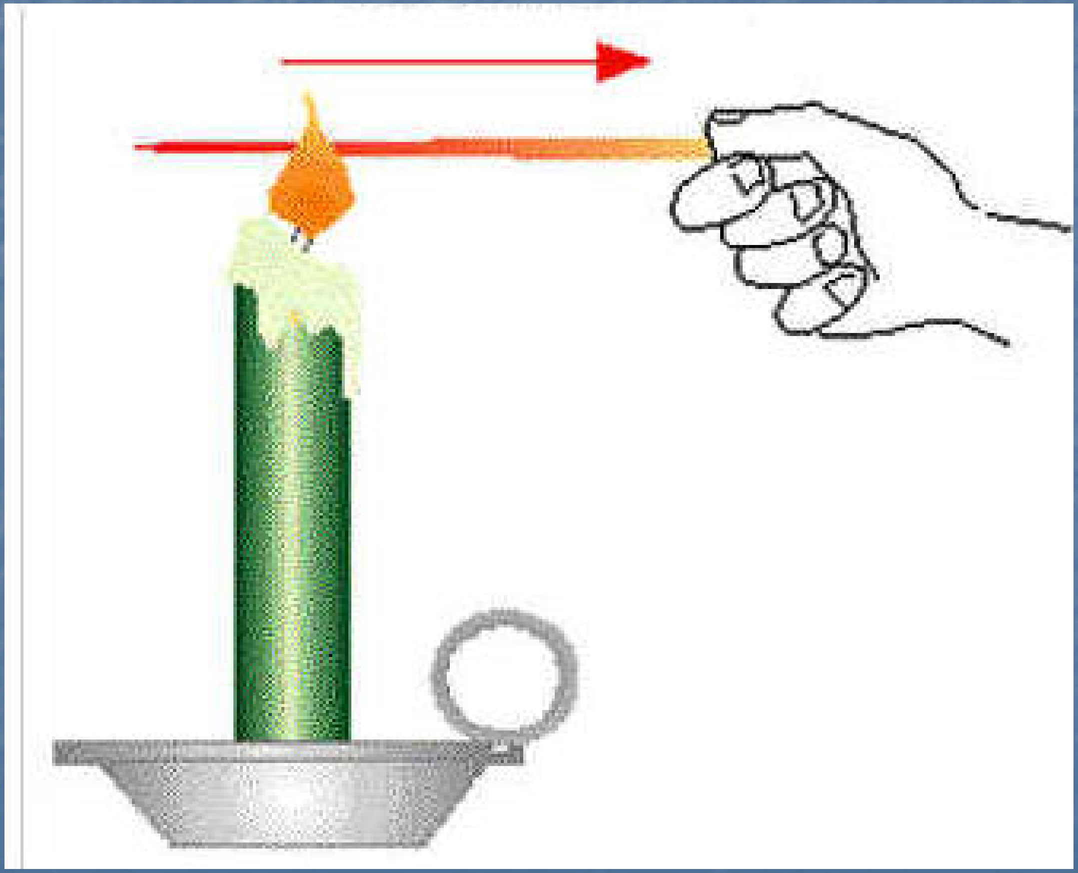
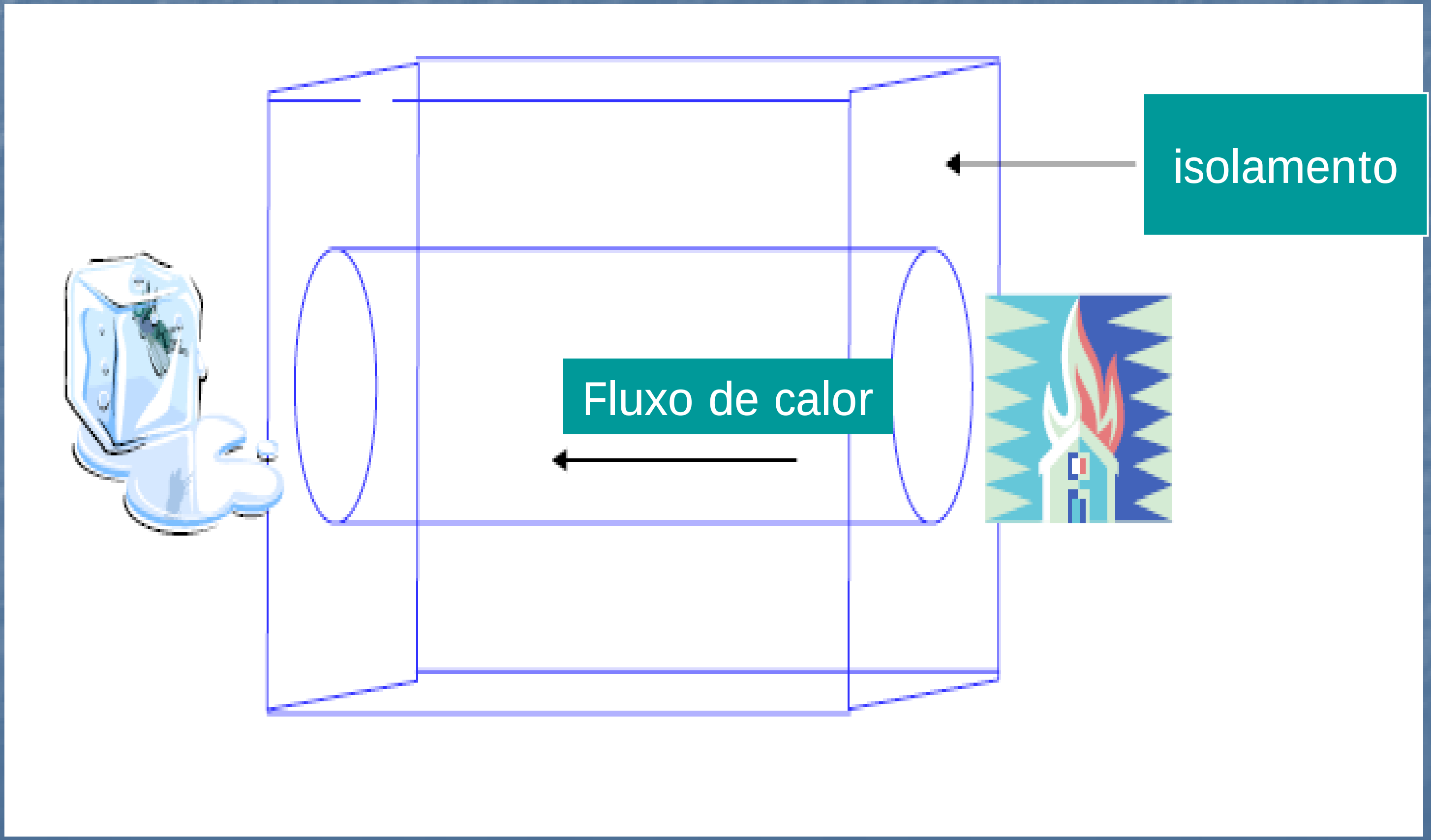
A Equação de Calor

- Uma das EDP´s clássica da Física-Matemática e a equação diferencial parcial que descreve o fluxo de calor em um corpo sólido. E uma aplicação mais recente é a que descreve a dissipação de calor gerado pelo atrito em vôos espaciais na re-entrada na atmosfera terrestre.

condução




isolamento
Fluxo de calor

- Considere uma barra com seção uniforme de um material homogêneo.
- Seja *u(x,t)* a temperatura localizada em *x* no tempo *t*.
- Desejamos desenvolver um modelo para determinar o fluxo de calor através da barra.
- Para isto devemos seguir alguns princípios básicos das fisica:
- A. A quantidade de calor fluindo através da barra é proporcional é proporcional a $\partial u / \partial x$ multiplicado por uma constante de proporcionalidade *k(x)* chamada a *condutividade térmica* do material.

- B. *O fluxo de calor é sempre no sentido desde um ponto de maior temperatura a pontos de menor temperatura.*

- *C. A quantidade de calor necessário para atingir a temperatura de um corpo de massa m em um a quantidade Δu é "m c(x) Δu", onde c(x) é chamada de calor específico do material.*
- *Assim, para determinar a quantidade de calor que flui através de uma seção de superfície A em um um tempo Δt está dado pela fórmula:*

$$H(x) = -k(x)(area \text{ of A})\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Analogamente, no ponto *x +Δx*, temos

$$H(x+\Delta x) = -k(x+\Delta x)(\mathit{area}\text{ of B})\Delta \mathrm{t}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}(x+\Delta x,t).$$

- Se no intervalo [*x, x+Δx*], no tempo *Δt* , existe alguma outra fonte de calor adicional, como por exemplo reações químicas, aquecimento ou correntes elétricas com densidade de energia *Q(x,t)*, a variação total de calor *ΔE* está dada pela fórmula:

ΔE = entrada de calor A – saída de calor B + calor gerado.

- Com $\Delta E = c(x)\, m\, \Delta u$, onde $m = \rho(x)\, \Delta V$, dividindo por $(\Delta x)(\Delta t)$, e tomando limites com Δx , e $\Delta t \to 0$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] + Q(x,t) = c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

- Assumindo que k, c, ρ são constantes, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)$$

Condições iniciais e de fronteira

- São dadas condições iniciais e de fronteira para $u(x,t)$.
- Consideramos um modelo matemático para uma barra condutora de calor isolada termicamente, sem fontes ou sumidouros com condições de fronteira homogêneas e com uma distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$:

A equação de calor unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\quad 0 < x < L.$$

O método de separação de variáveis

- Propomos uma solução da forma *u(x,t) = X(x) T(t)* .
- Substituindo na equação obtemos:

$$X(x)T'(t) = \beta\, X''(x)T(t)\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0.$$

Que conduz à seguinte equação

$$\frac{T'(t)}{\beta\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \boxed{k}\,.$$

temos

$$T'(t) - \beta\, kT(t) = 0$$ e $$X''(x) - kX(x) = 0.$$

Condições de fronteira

- se estamos interessados na solução não trivial *X(x)*, que satisfaz:

$$X''(x) - kX(x) = 0$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

- Podemos considerar três casos:
- $k = 0$, $k > 0$ e $k < 0$.

- Caso (i): $k = 0$. Neste caso temos $X(x) = 0$, a solução trivial
- Caso (ii): $k > 0$. Seja $k = \lambda^2$, então subsituindo temos $X'' - \lambda^2 X = 0$. O conjunto fundamental de soluções é: $\{ e^{\lambda x}, e^{-\lambda x} \}$. E a solução geral está dada por : $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

  $X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$, e

  $X(L) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} = 0$, assim

  $c_1 (e^{2\lambda L} - 1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

  Mais uma vez obtemos a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

Ainda bem que temos mais um caso (iii) quando $k < 0$.

- Novamente começamos com $k = -\lambda^2$, $\lambda > 0$.

  $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$,

cuja equação característica é

  $r^2 + \lambda^2 = 0$, ou $r = \pm \lambda i$.

A solução geral:

  $X(x) = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}$ ou:

  $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$.

Aplicando as condições de fronteira temos

$X(0) = X(L) = 0$ que implica que:

$c_1 = 0$ e $c_2 \sin \lambda L = 0$, para que isto acontecer deve ser $\lambda L = n\pi$, i.é.

$\lambda = n\pi / L$ ou $k = -(n\pi / L)^2$.

assim

$X_n(x) = a_n \sin (n\pi / L)x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Para $T'(t) - \beta k T(t) = 0, \quad k = -\lambda^2$.

- Re-escrevendo esta equação como:

  $T' + \beta\lambda^2 \; T = 0$ ou $T' = -\beta\lambda^2 \; T$.

  Vemos que as soluções são da forma

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)t}$$

u(x,t) = ∑ u_n(x,t), para todo n.

- Mais precisamente,

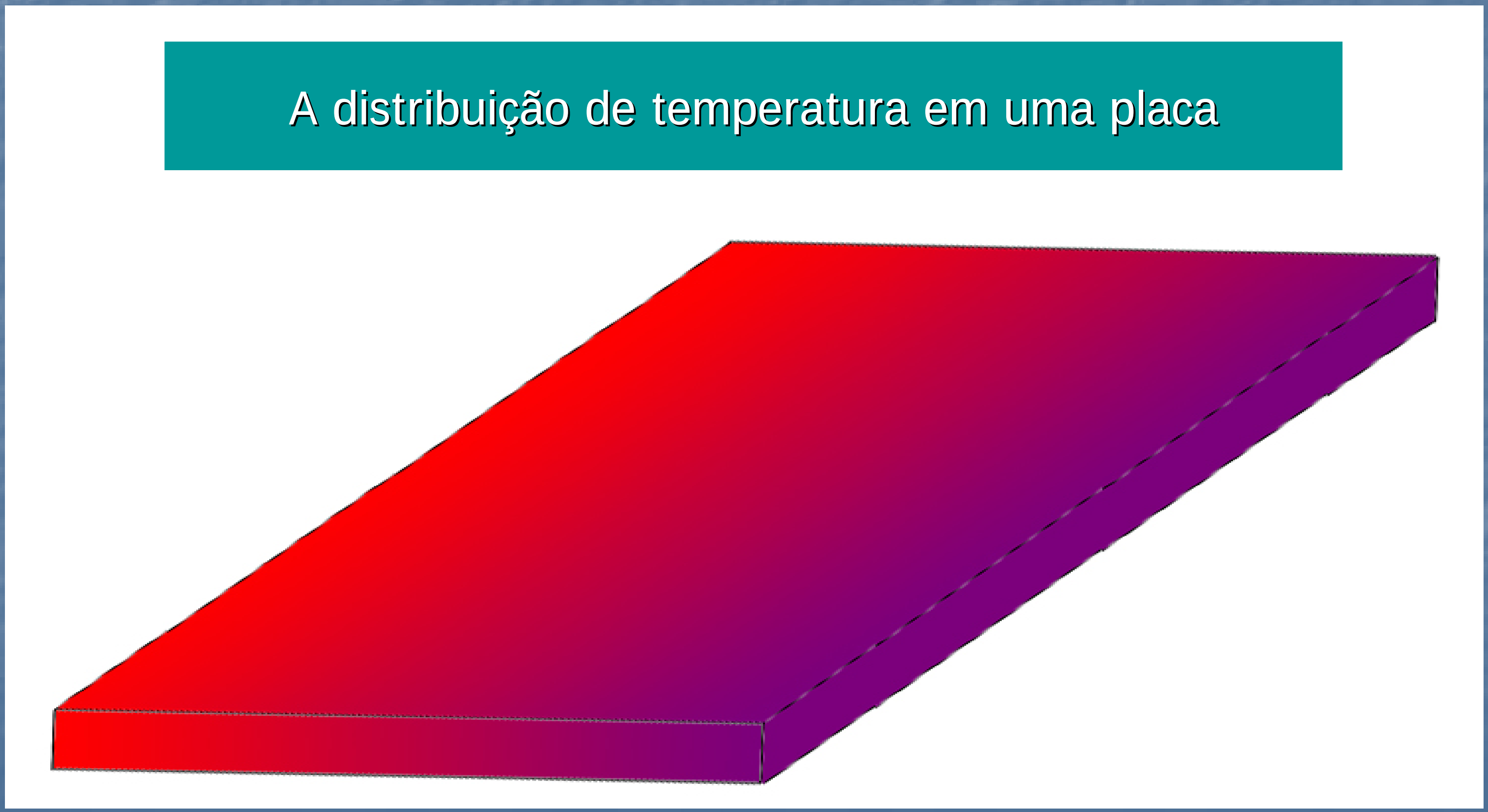
$$u(x,t)=\sum_{1}^{\infty} c_n e^{-\beta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,.$$

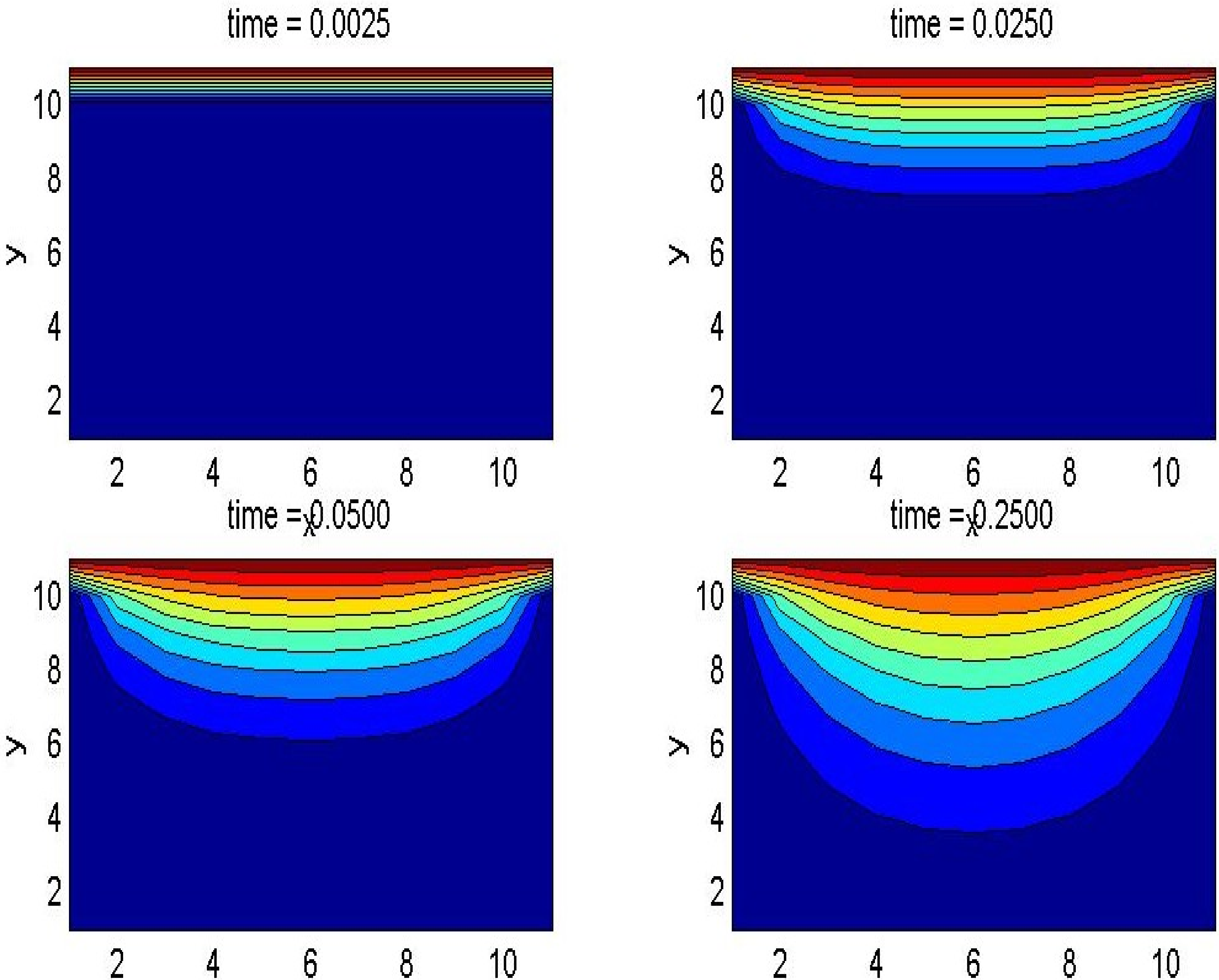
Devemos ter :

$$u(x,0)=\sum_{1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x = f(x)\,.$$

- Isto conduz novamente à questão se é possível representar a *f(x)* por uma série de Fourier em senos ?

A equação de calor bidimensional




time = 0.0025
time = 0.0250
time = 0.0500
time = 0.2500
y
x
2
4
6
8
10

As equações no estado transitório e no estado estacionário

Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Equação de calor

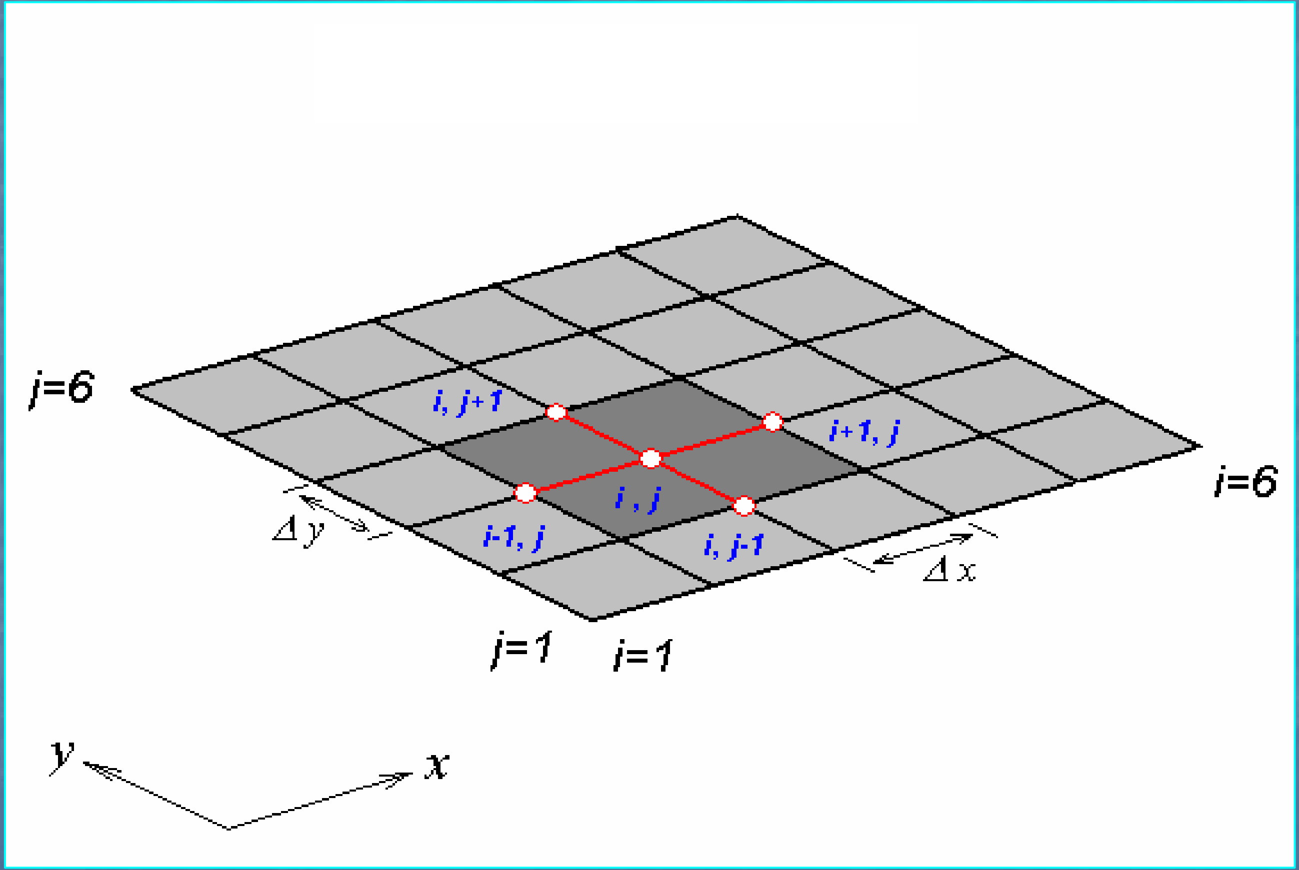
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Métodos numéricos

- 1. método das diferenças finitas
- 2. métodos dos elementos finitos
- 3. métodos dos volumes finitos
- 4. método dos elementos de contorno

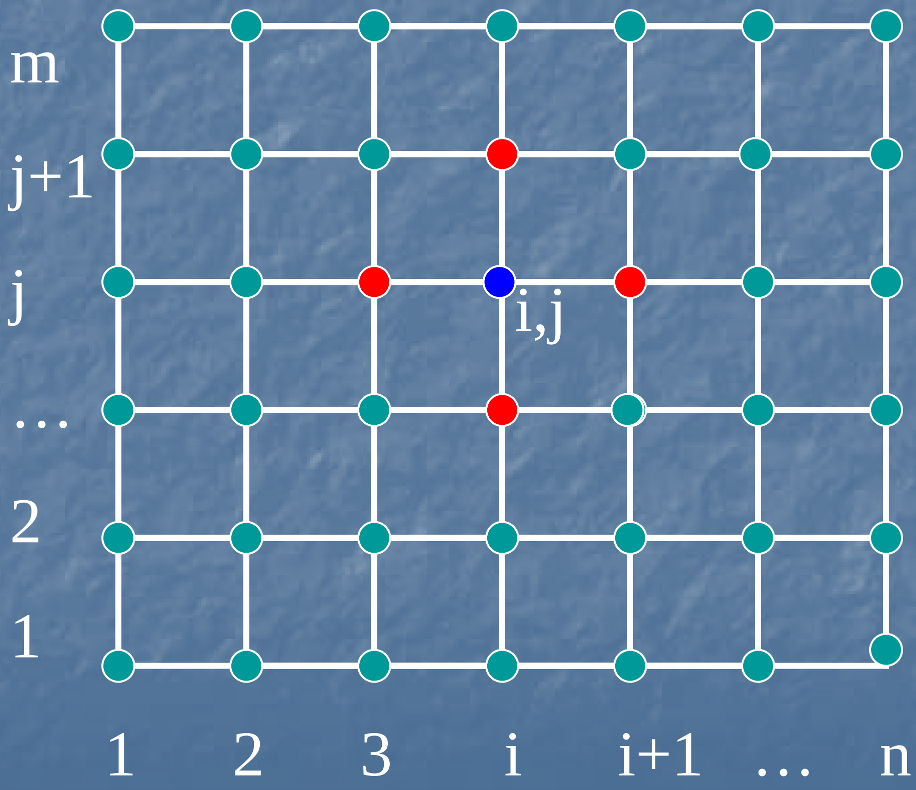
Métodos das Diferenças finitas e dos Elementos finitos

Método das diferenças finitas



Resolvendo a equação de LAPLACE

- **O procedimento padrão consiste em particionar o domínio gerando uma malha.**
- **Cada nó da malha é identificado como um elemento na matriz e seu valor depende dos nós vizinhos.**



Usando diferenças centradas

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} = \frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2} = \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta v^2}$$

&

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2} = 0$$

Para uma partição for uniforme então $\Delta u = \Delta v$

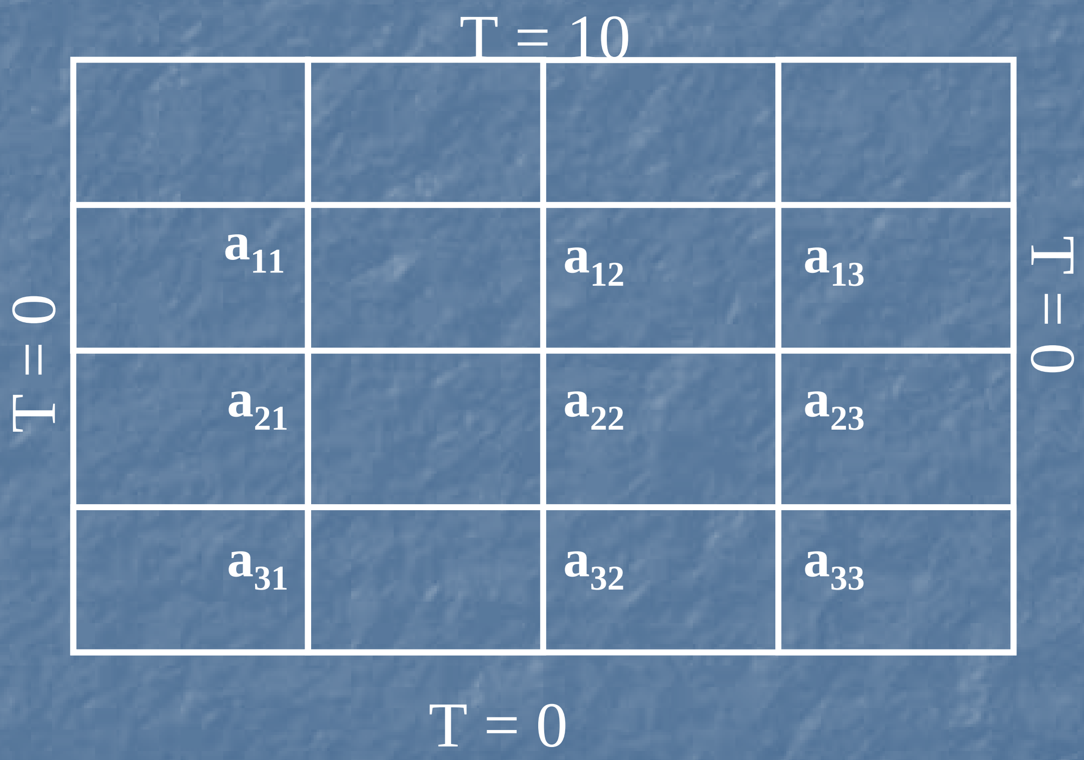
$$\Omega_{i+1,j} - 4\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j} + \Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1} = 0$$

$$\frac{\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j} + \Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1}}{4} = \Omega_{i,j}$$

O que isto significa? Obtemos o valor em cada nó fazendo a média com os valores no nós vizinhos dispostos sobre uma cruz '+'.

Isto funciona para os nós localizados no interior da região. Para os nós próximos da fornteira usamos os valores dados pelas condições de fronteira.

Exemplo



Calculemos os valores do potencial nos nós internos usando valores nas fronteira. Não há fontes nem sumidouros.

Para o nó a_{11}

$$\frac{a_{12}+a_{21}+0+10}{4}=a_{11}$$

Para o nó a_{12}

$$\frac{a_{12}+a_{13}+a_{22}+10}{4}=a_{12}$$

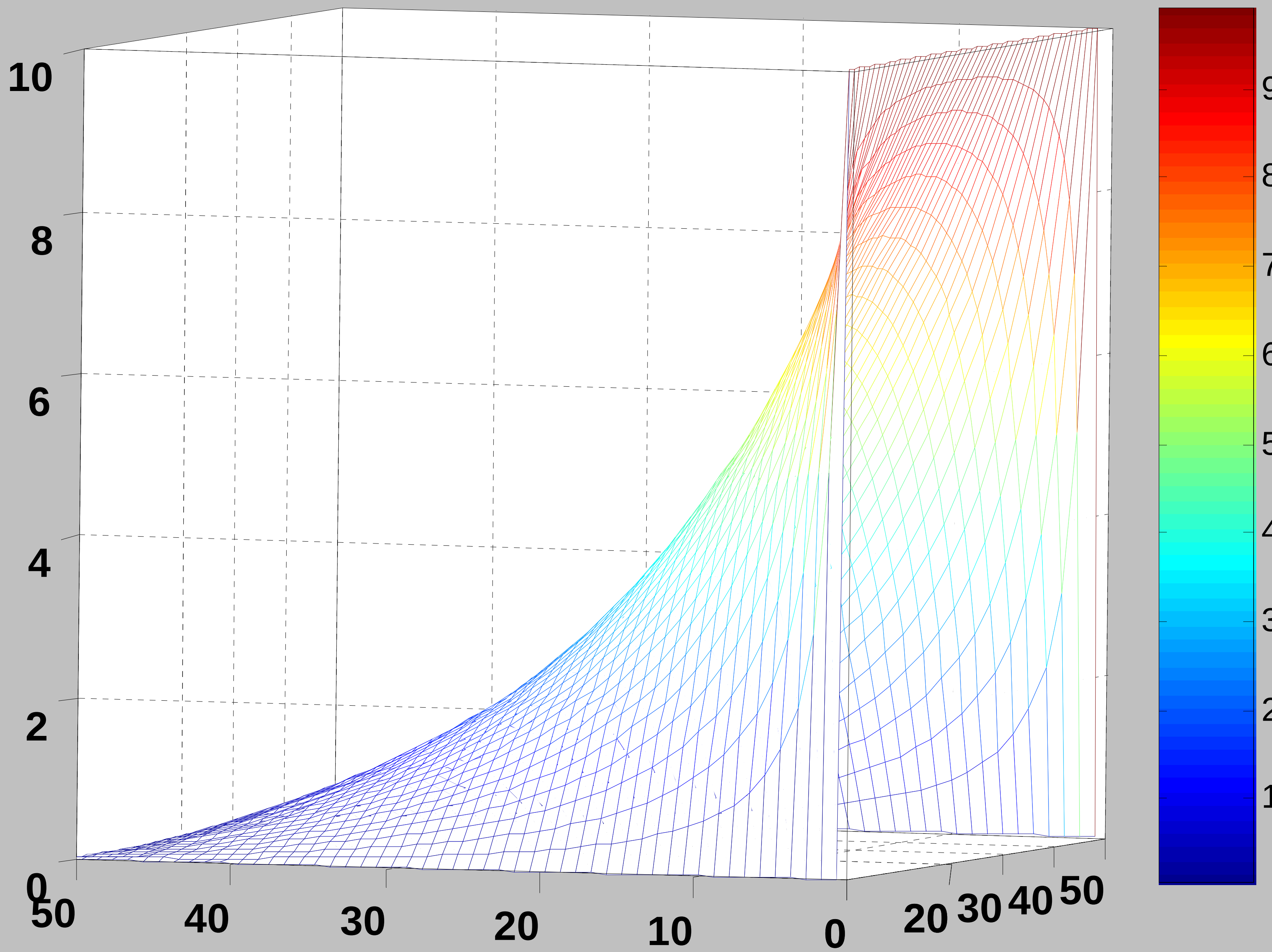
Para o nó a_{13}

$$\frac{a_{12}+a_{23}+0+10}{4}=a_{13}$$

Para o nó a_{21}

$$\frac{a_{11}+a_{22}+a_{31}+0}{4}=a_{21}$$

-4	1	0	1	0	0	0	0	0	10
1	-4	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	-4	0	0	1	0	0	0	10
1	0	0	-4	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	-4	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	-4	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	-4	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	-4	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	-4	0


10
8
6
4
2
0
50
40
30
20
10
0
20
30
40
50
9
8
7
6
5
4
3
2
1

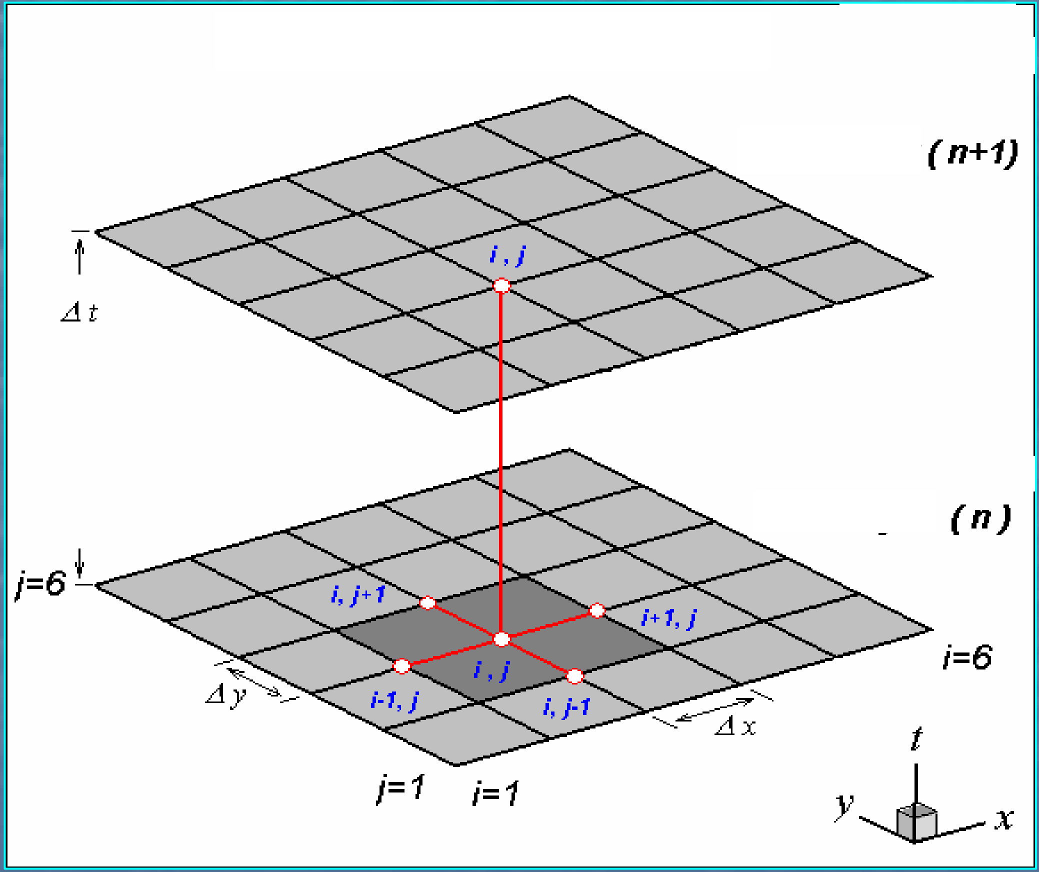
A equação parabólica

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

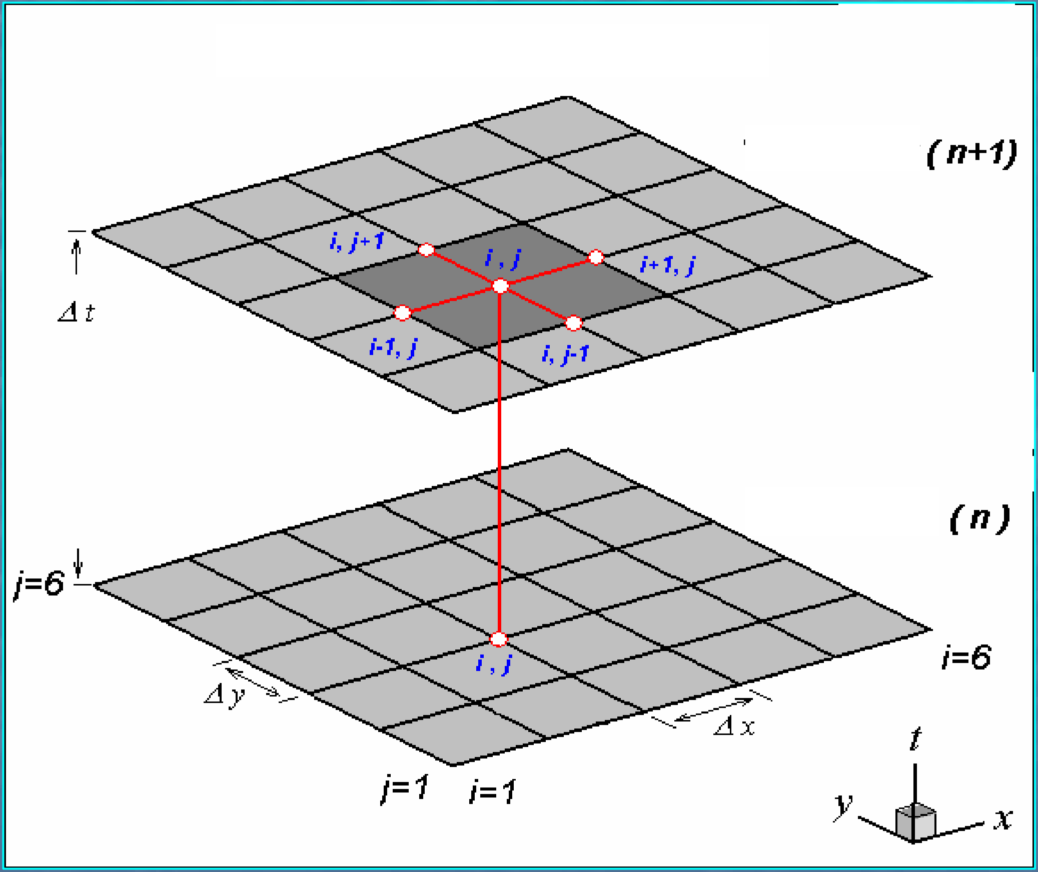
Três esquemas de integração temporais

- 1. Explícito
- 2. Implícito
- 3. Crank-Nicolson

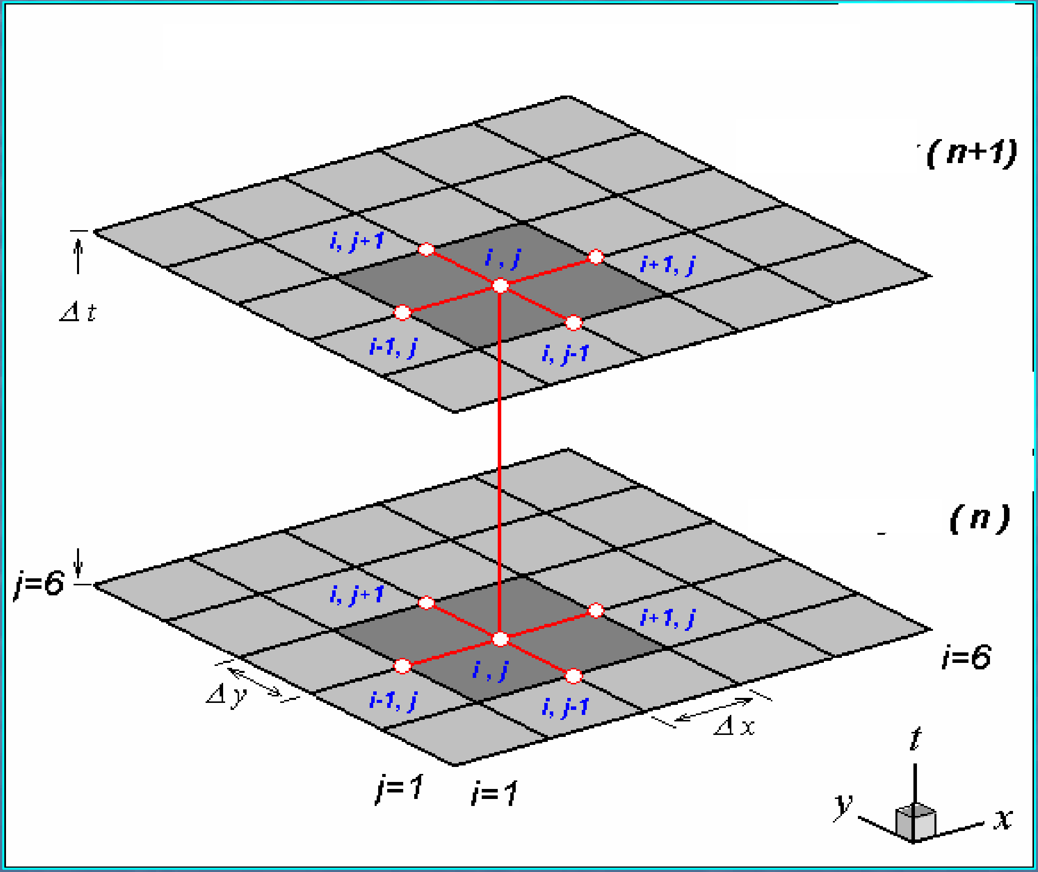
Esquema Explícito



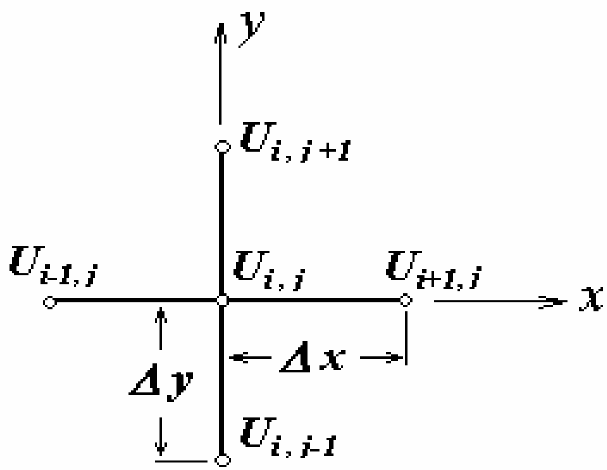
Esquema Implícito



Crank-Nicolson



Aproximação das derivadas de segunda ordem



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Aproximação das derivadas de primeira ordem em relação a *x*

$U_{i-1,j}$ —— $U_{i,j}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}$$

backward

$U_{i,j}$ —— $U_{i+1,j}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x}$$

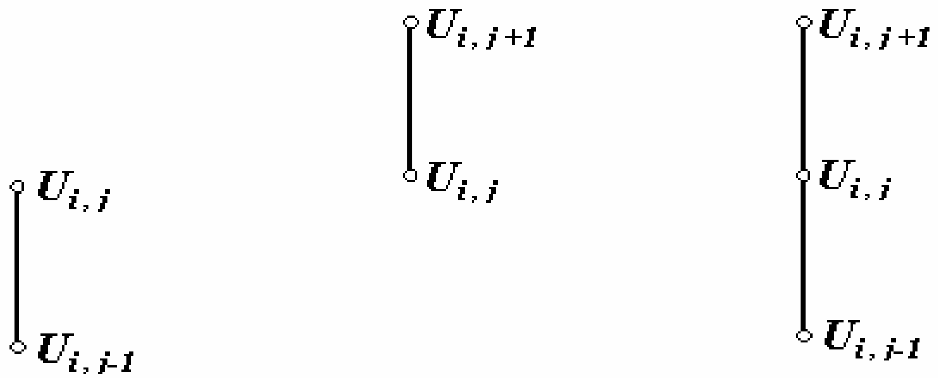
forward

$U_{i-1,j}$ —— $U_{i,j}$ —— $U_{i+1,j}$

central

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

Aproximação das derivadas de primeira ordem em relação a *y*



$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y}$$

backward

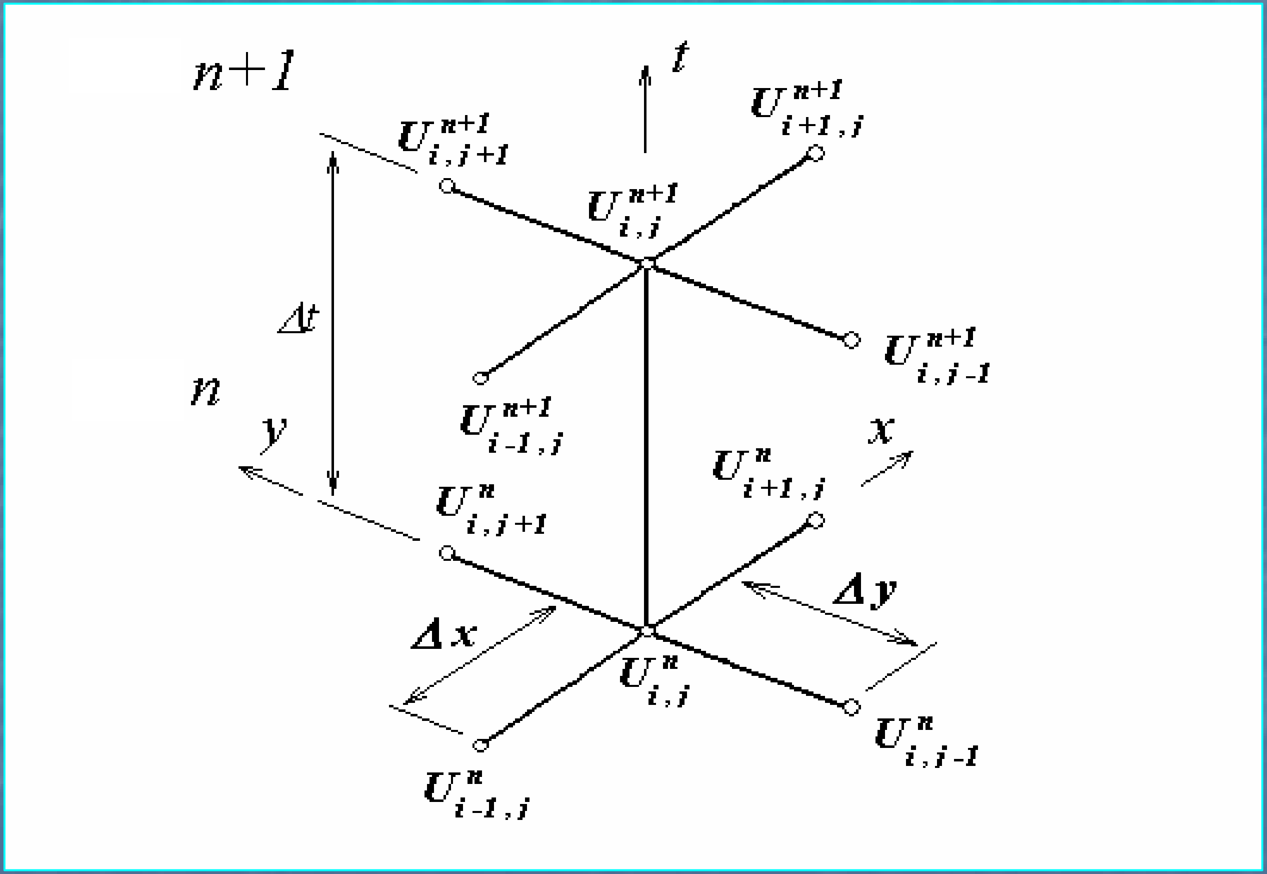
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y}$$

forward

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

central

Discretização temporal



Discretização esquema explícito

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{U_{i-1,j}^{n} - 2U_{i,j}^{n} + U_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n} - 2U_{i,j}^{n} + U_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2} \right)$$

Discretização esquema implícito

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right)$$

Discretização usando o esquema de Crank-Nicolson

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{U_{i-1,j}^{n} - 2U_{i,j}^{n} + U_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n} - 2U_{i,j}^{n} + U_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}\right) +$$

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)$$