"there are no right model, but there are certainly lots of wrong ones."

Modelos Matemáticos em Epidemiologia

Algumas definições

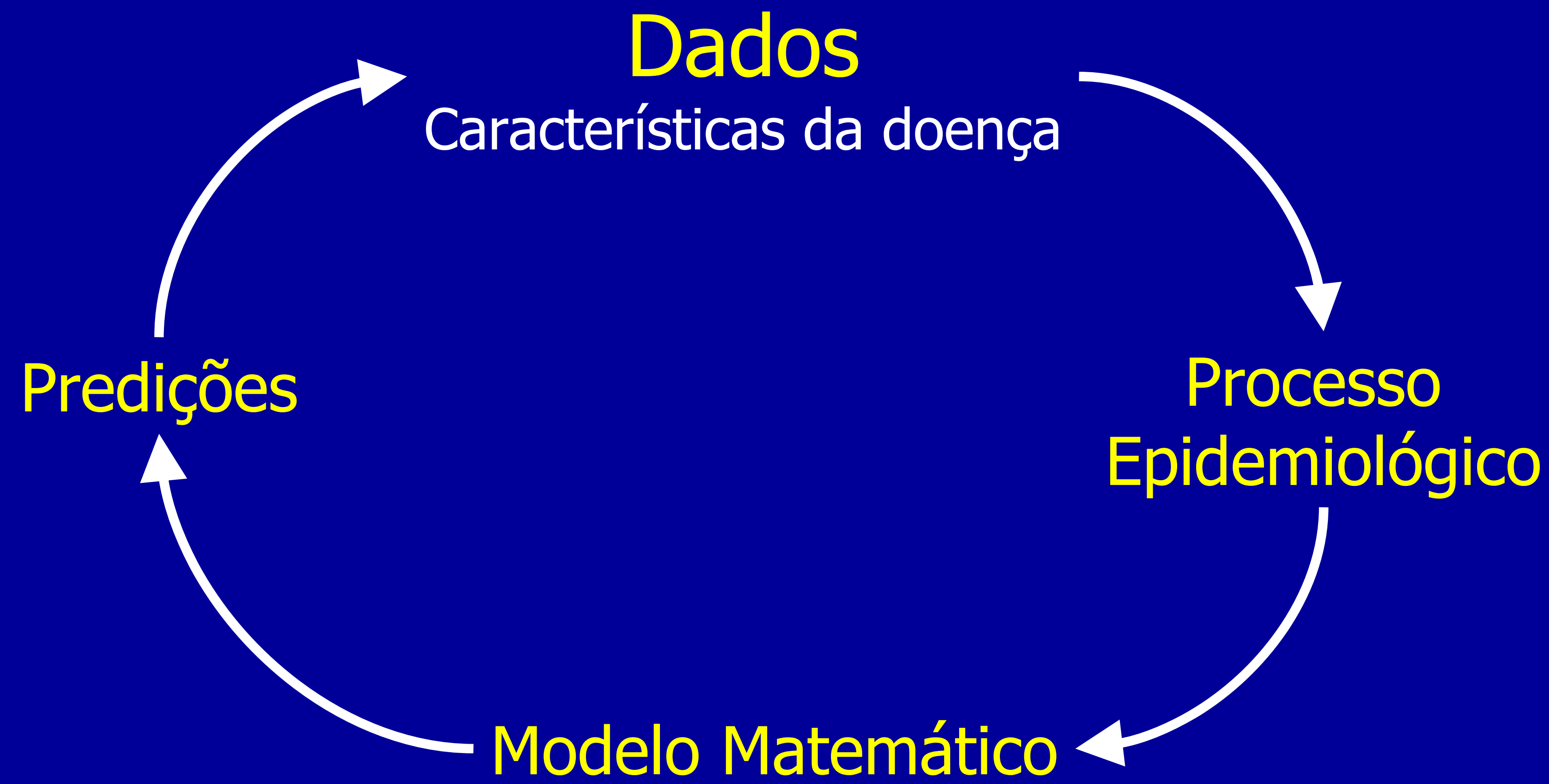
- Algumas doenças contagiosas que acometem rapidamente a um grande segmento de uma população são chamadas de *epidemias* (do grego *epi*, sobre + *demos*, povo.) *Epidemiologia* é a ciência que estuda a distribuição e freqüência dessas doenças.
- *Epidemiologia: (do ponto que nos interessa)* estado no qual o número de infectados cresce a partir de um valor inicial.
- *Endemia:* Doença que existe constantemente em determinado lugar e ataca número maior ou menor de indivíduos

O **número de reprodução básico,** R_0 de uma doença contagiosa é o número médio de novos infectados que gera um indivíduo doente sobre uma população sem imunidade à doença e na ausência de qualquer controle.

quando $R_0 < 1$ o contágio diminui

se $R_0 > 1$ a epidemia continua se alastrando

O Processo de Modelagem



A compartimentagem da população

- Susceptíveis
- Infectados
- Expostos
- Recuperados
- Vacinados
- ...

Questões específicas

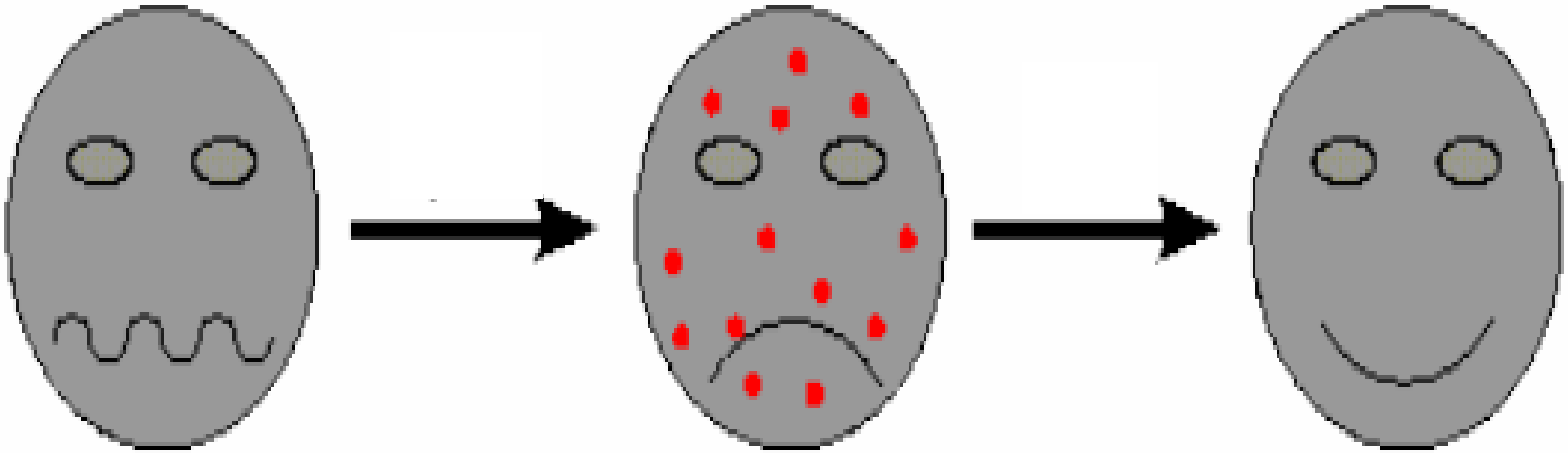
- Como melhorar o controle de transmissão endêmica?
- a vacinação é eficiente para o controle da epidemia?
- É sempre benéfico estimular a vacinação ?
- Qual é melhor estratégia para proteger um grupo vulnerável ?

Tipos de Modelos Epidemiológicos

Modelos compartimentados

- divide a população em termos de portadores da doença modelo SIR : susceptível, infectado, recuperado
- Faz hipóteses 'grosseiras' em relação à população (ignora faixa etária, classe social, etc.)

$S + I + R = N$ (população constante)

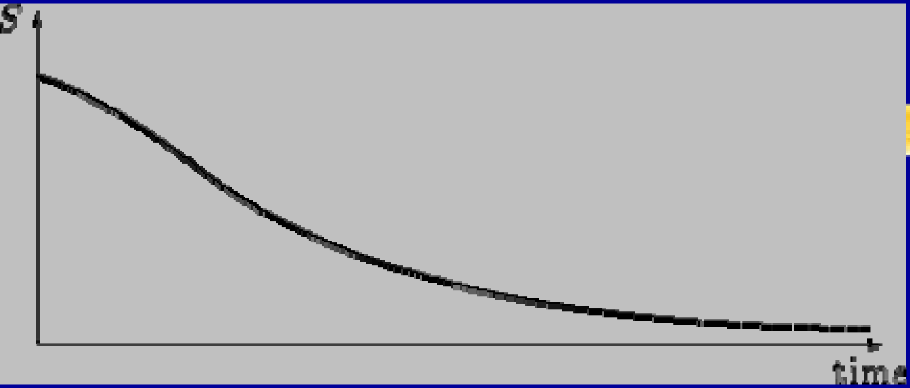


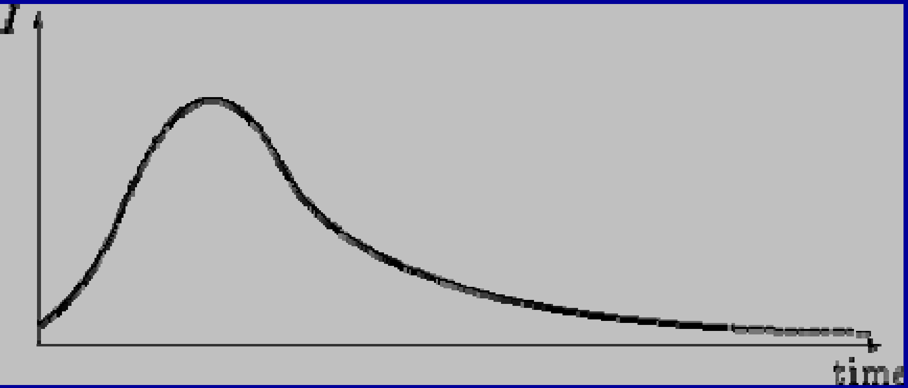
S: susceptível

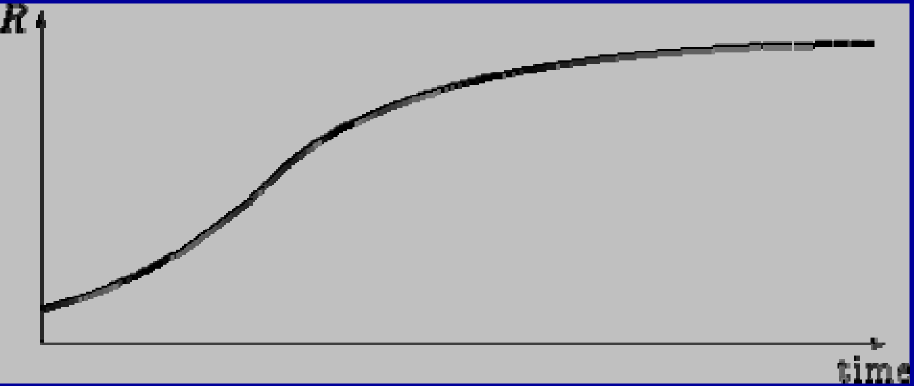
I: infectado

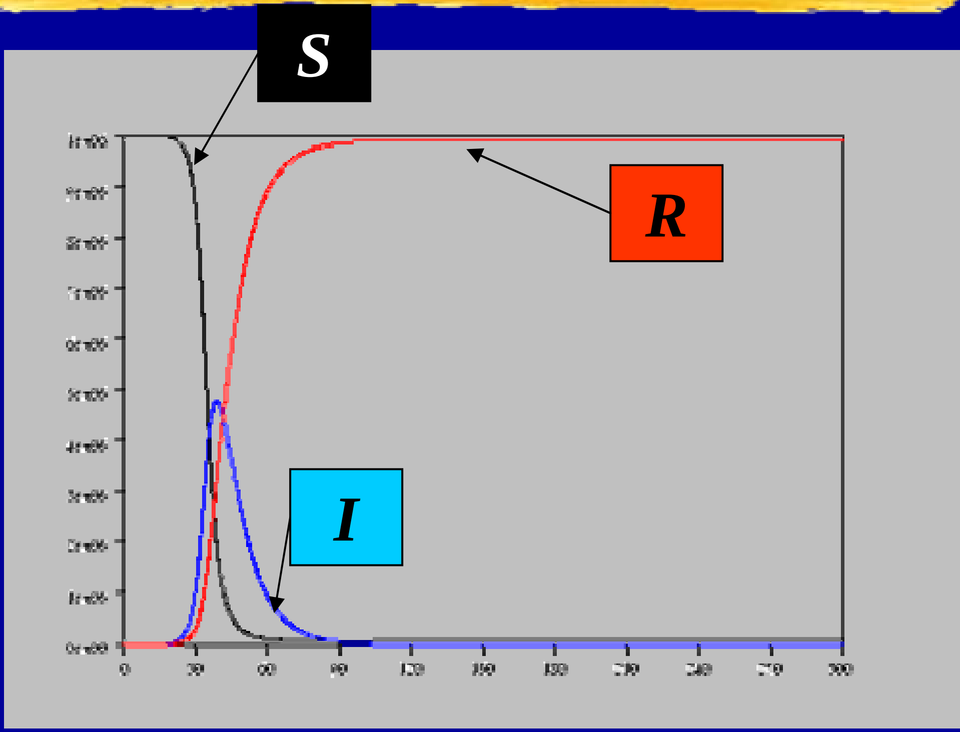
R: recuperado

Um surto de sarampo



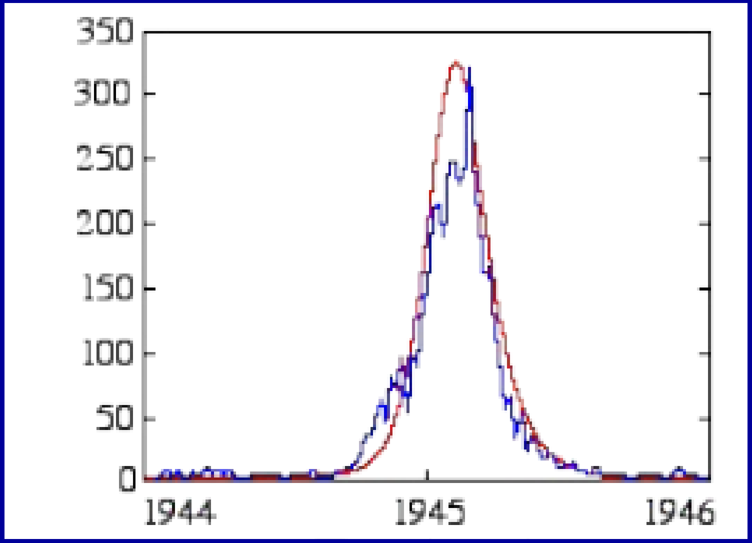




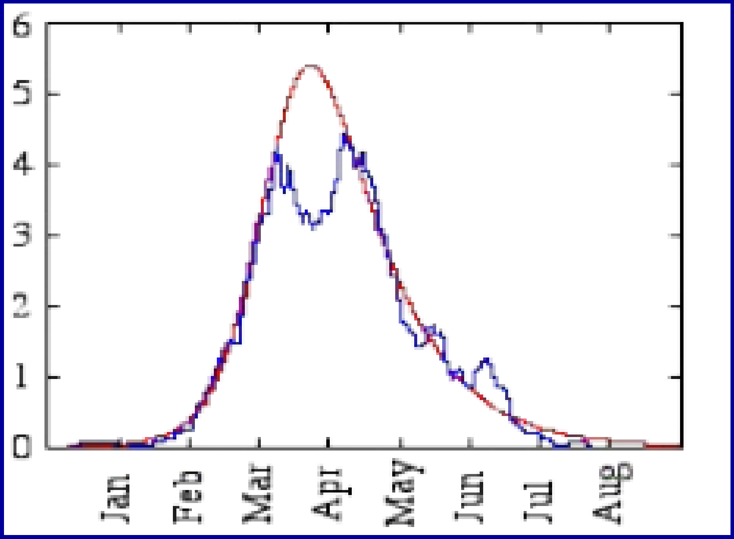


Comparação entre SIR e ajuste de dados

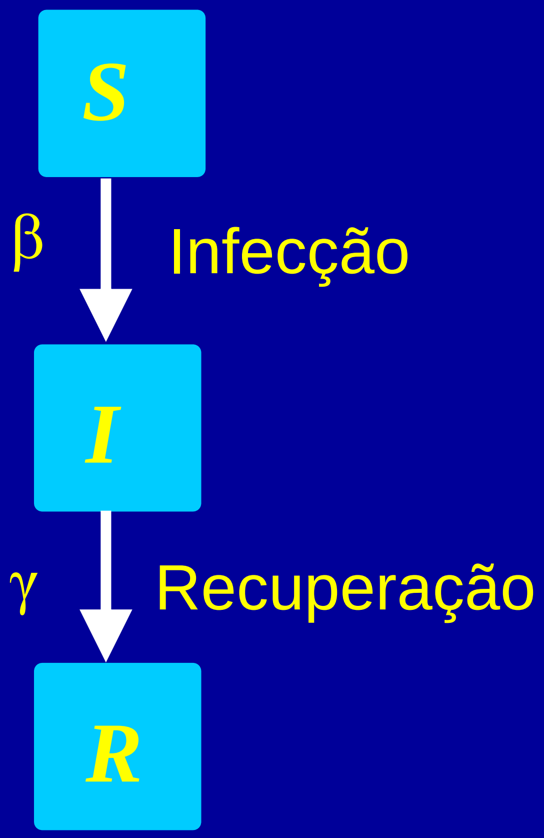
Sarampo (semanalmente)



Peste bubônica (diariamente)



SIR em uma população fechada



Princípio de Ação de Massas

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

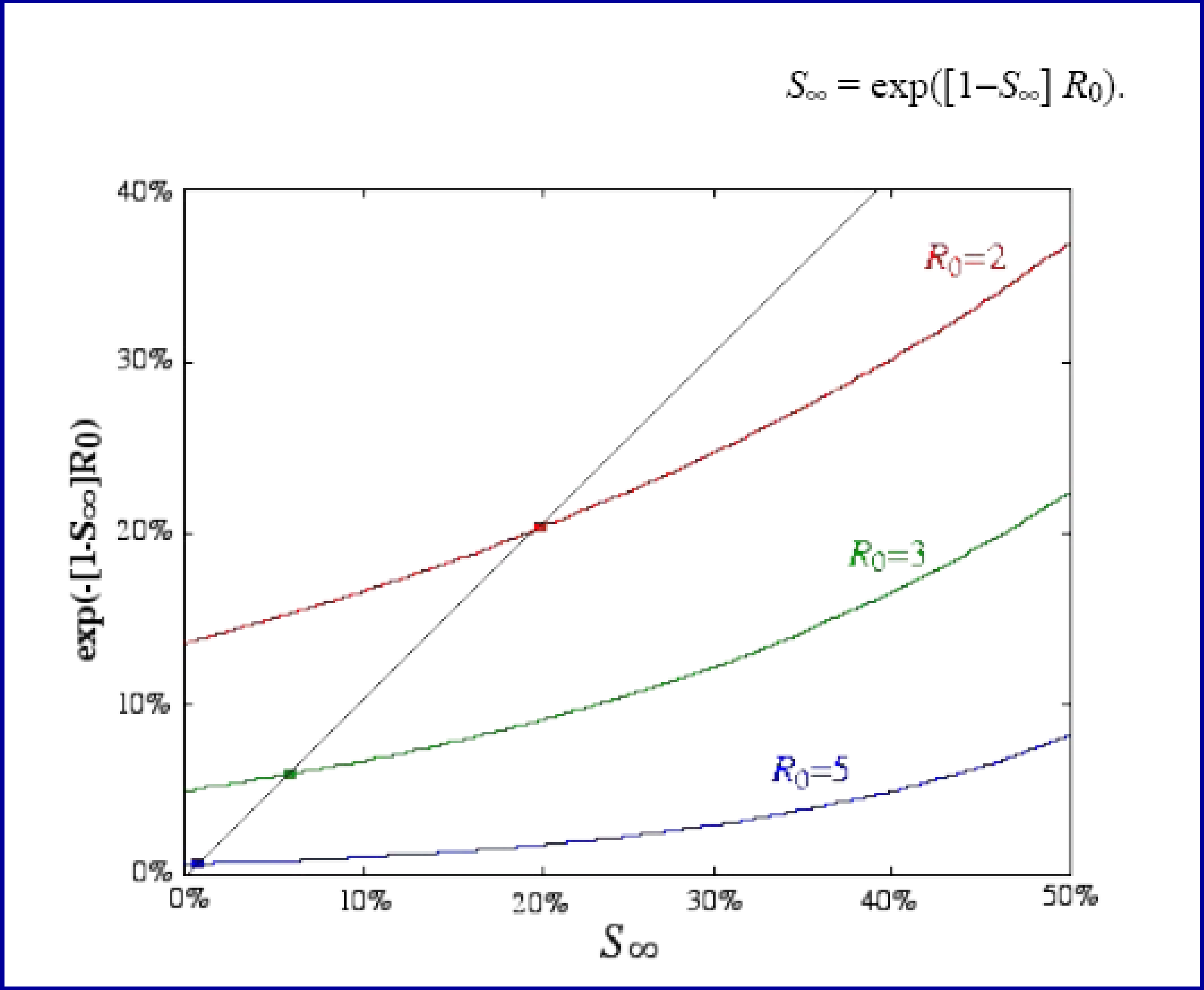
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

β: coeficiente de transmissibilidade

γ : taxa de recuperação

Um surto de gripe (um outro uso de R_0)

um método gráfico para determinar o número de indivíduos que escaparam da gripe



S_∞

Porcentagem de indivíduos recuperados após de um período <u>grande</u> de tempo

O parâmetro epidemiológico R_0

Um Modelo Epidemiológico elementar

- A taxa de novos infectados é proporcional à população infectada

$$\frac{dI}{dt} = \beta I$$

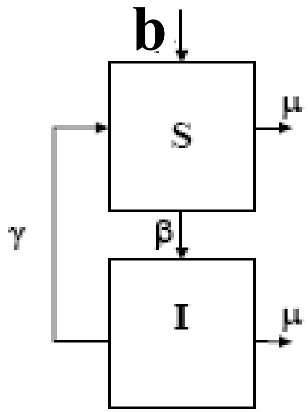
- Isto é, um modelo de crescimento exponencial

- Parque uma epidemia não cresce exponencialmente ? Decréscimo da população susceptível
- O contágio depende dos tamanhos das populações de infectados e dos susceptíveis

SIS: Características do modelo

- Tipo de doença que não confere imunidade
- Período de incubação curto
- Incidência sazonal pequena
- Doenças sexualmente transmitidas

SIS

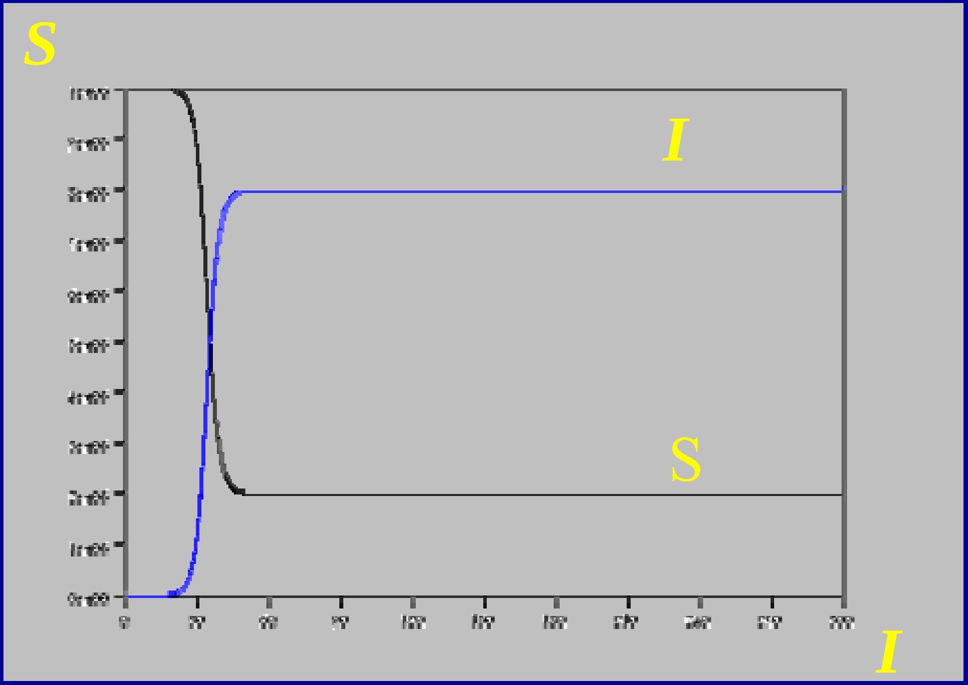


$$\frac{dS}{dt} = b - \beta \cdot S \cdot I + \gamma \cdot I - \mu \cdot S$$

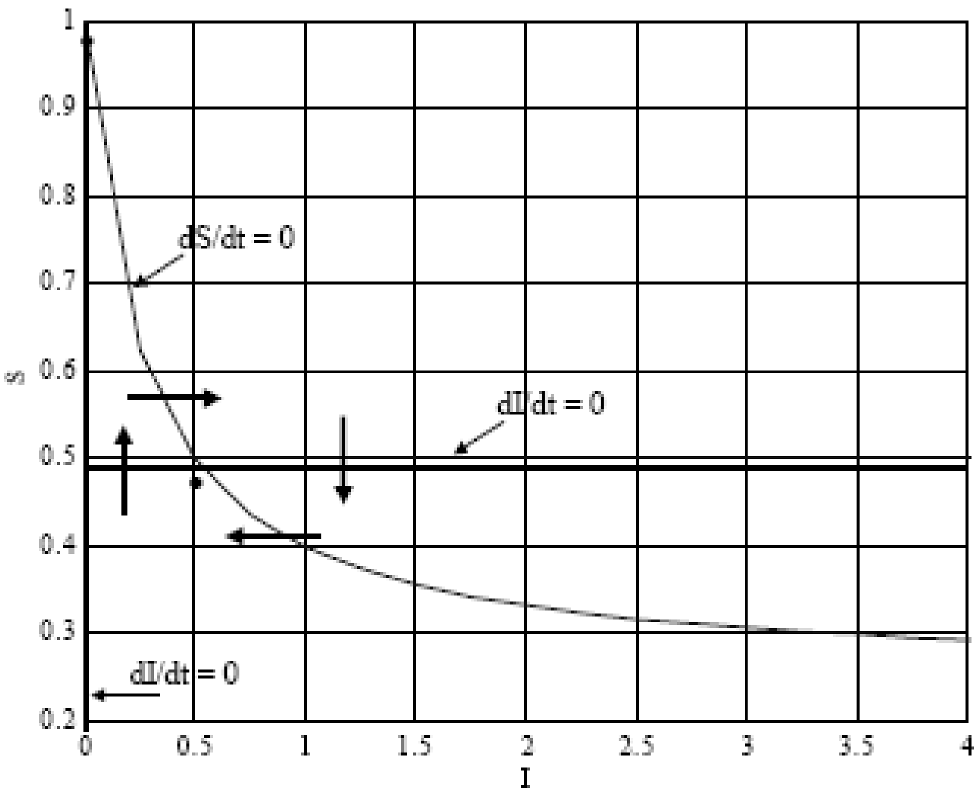
$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I - \mu \cdot I$$

SIS padrão

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$



SIS



$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow S = \frac{\gamma \cdot I + \mu}{\beta \cdot I + \mu}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = 0, \quad S = \frac{\mu + \gamma}{\beta}$$

Análise do modelo *SIS*

- Cálculo de níveis endêmicos

$$\boxed{I_{\infty} = \frac{\beta - (\gamma + \mu)}{\beta}}$$

- Critério para condição de endemia

$$\boxed{\frac{\beta}{\gamma + \mu} > 1}$$

- Dois pontos de equilíbrio

SIS padrão: *pontos fixos*

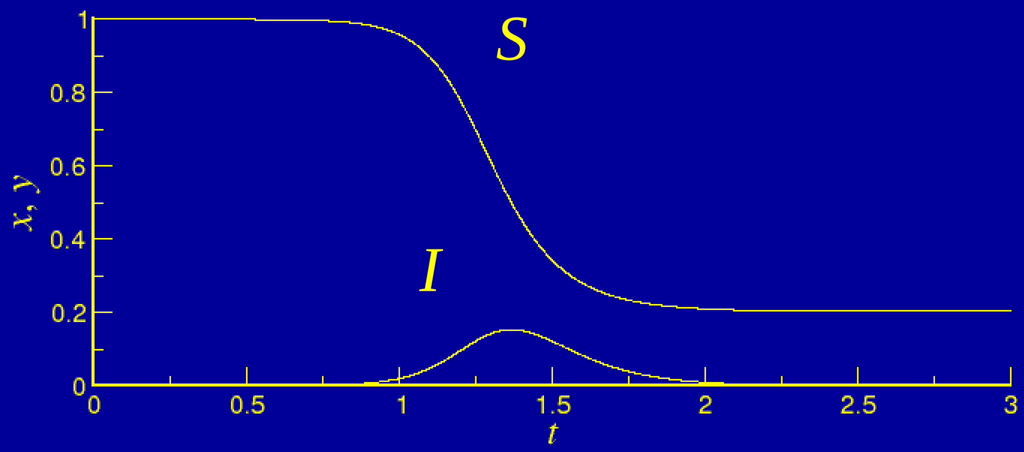
$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = 0$$

$\rightarrow$ $I^* = 0$

com $S = 1 - I$ $\rightarrow$ $I^* = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$

- se $\beta S > \gamma$, o número de infectados aumenta
- Uma epidemia se espalha através da população



- O número de infectados cai quando S permanece abaixo de $R_0 = \beta / \gamma$,

O número básico de reprodução: R_0

- Um parâmetro de central importância em epidemiologia

  R_0 : o número de contágios que resultam pela introdução de um indivíduo infectado em um grupo totalmente suceptível

- se $R_0 > 1$ a epidemia se alastra
  (cada caso se reproduz a mais que um contágio)

- A epidemia termina quando S cai abaixo de β / γ

S I R básico

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

β: coeficiente de transmibilidade
γ: taxa de recuperação

Condições iniciais

$$S(0) = 1 - \varepsilon,\ I(0) = \varepsilon,\ R(0) = 0,$$ com $\varepsilon \ll 1$

Um único Ponto fixo: $I^* = 0$

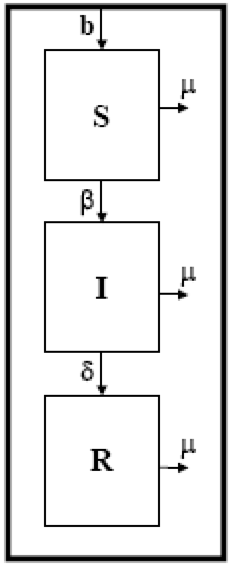
SIR em uma população com nascimentos e mortes

SIR

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{b} - \beta \cdot S \cdot I - \mu \cdot S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \delta \cdot I - \mu \cdot I$$

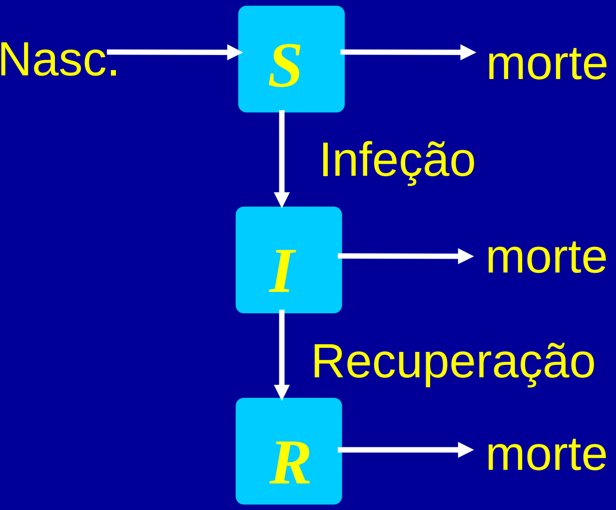
$$\frac{dR}{dt} = \delta \cdot I - \mu \cdot R$$



b: nascimentos

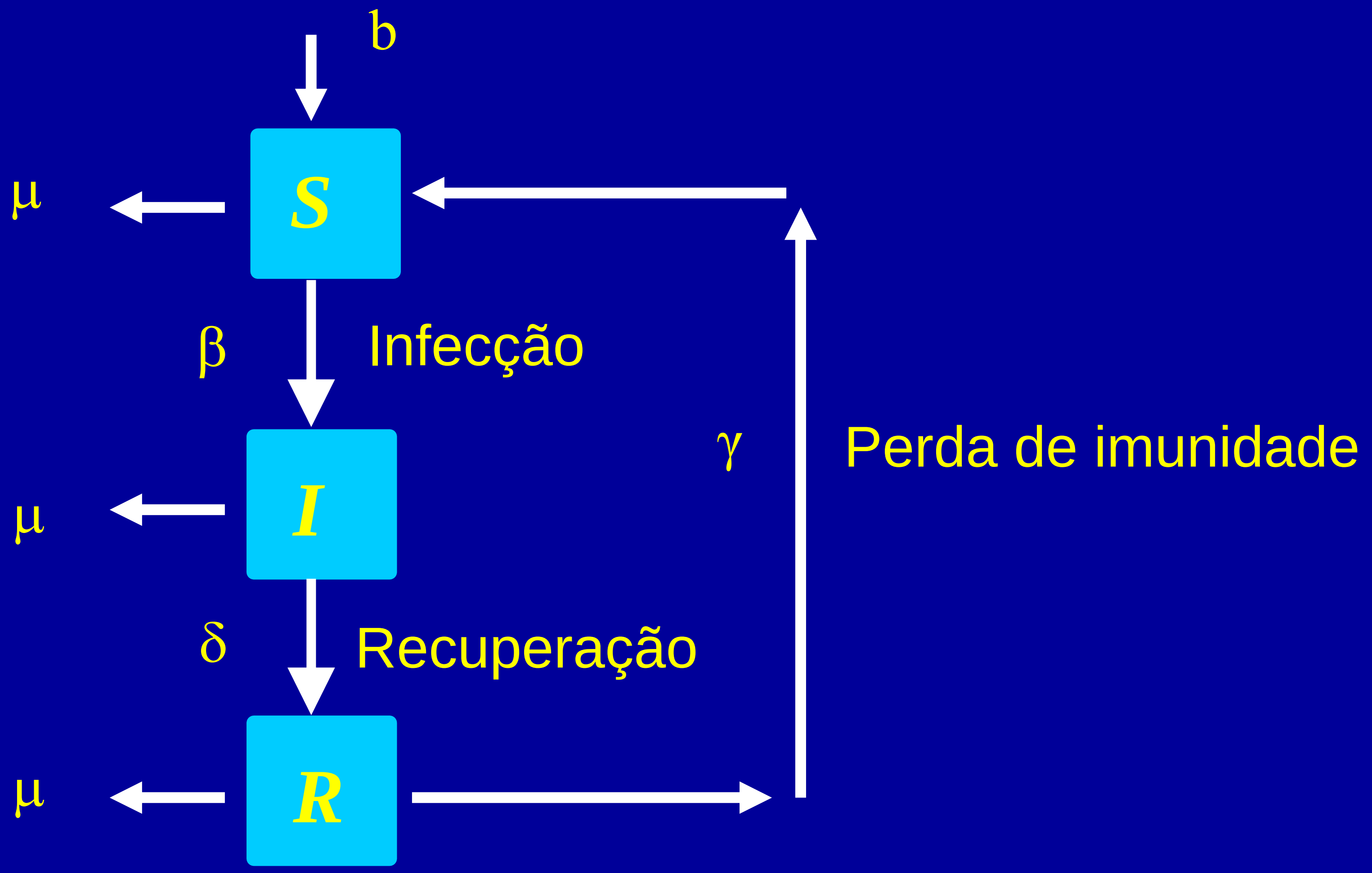
μ: mortandade

SIR com mortes e nascimentos



- Consideramos nascimentos e mortes
- População susceptível realimentada pelos indivíduos imunizados
- se $R_0 > 1$, o sistema vai para um equilíbrio endêmico:
  - taxa de nascimentos contrabalança
  - taxa de infecção contrabalança com os recuperados

SIR completo



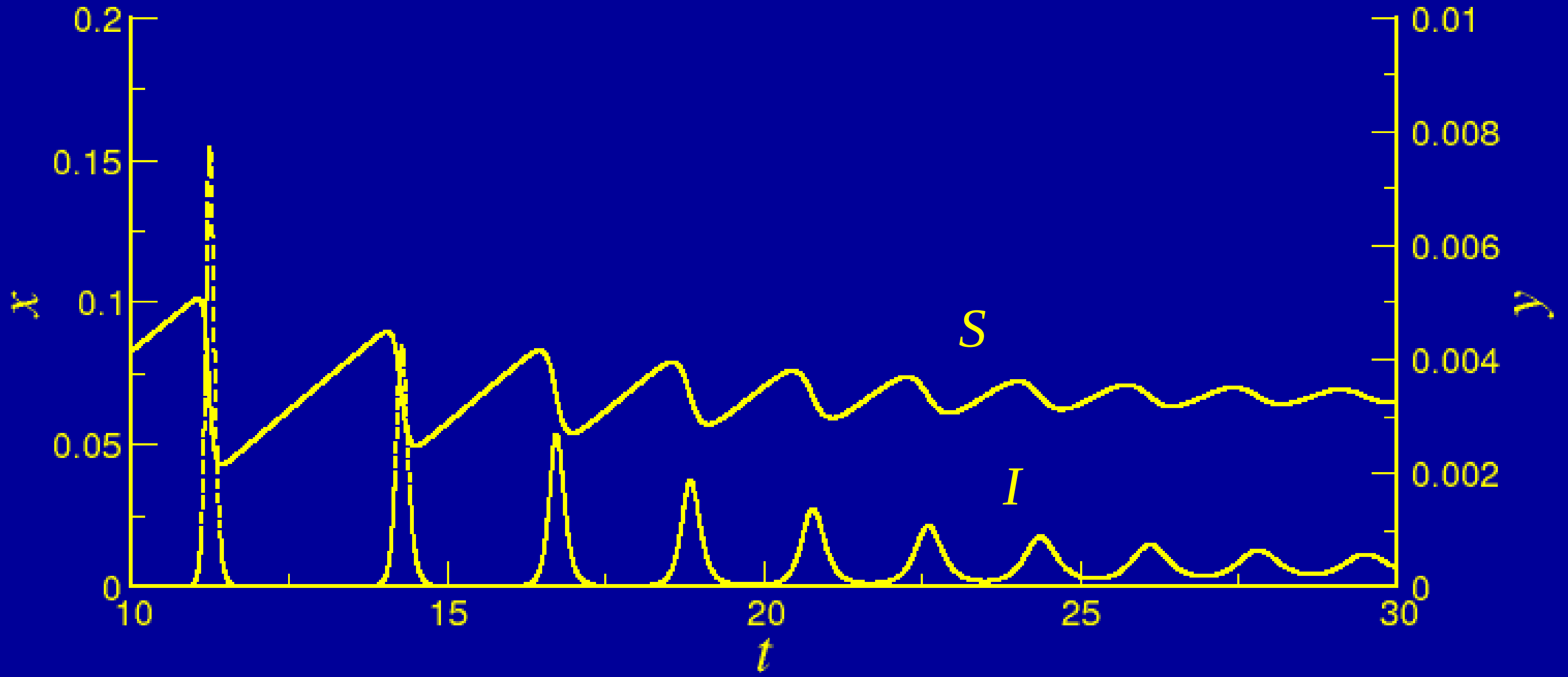
SIR

$$\dot{S} = \mu N - \beta SI - \mu S$$

$$\dot{I} = \beta SI - (\mu + \gamma)I$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R$$

• O sistema se aproxima ao equilíbrio endêmico com oscilações amortecidas



O número básico de reproduçao: R_0

- $R_0 > 1$ o contágio persiste
- R_0 indica a dificuldade em erradicar a infecção
- fração crítica de vacinação $p_c = 1 - 1/R_0$
- Facilidade para erradicar uma infecção com baixo R_0 (varíola: $R_0 \approx 5$, sarampo: $R_0 \approx 15$)

Modelos com maior complexidade

$$\frac{dS}{dt} = \boldsymbol{b} - \beta SI - \mu S - VS$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - gI - dI$$

$$\frac{dR}{dt} = VS + gI - \mu R$$

V: vacinados

S E I R: *susceptíveis + expostos + infectados + recuperados*

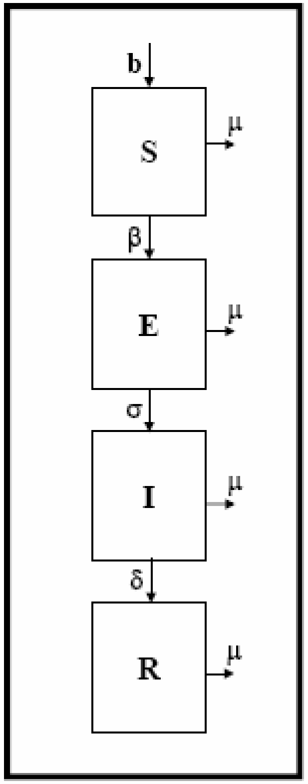
SEIR

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta \cdot S \cdot I - \mu \cdot S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \sigma \cdot E - \mu \cdot E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma \cdot E - \delta \cdot I - \mu \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta \cdot I - \mu \cdot R$$



E : expostos

M S E I R:
imunizados + susceptíveis + expostos + infectados + recuperados

M: nascimentos com imunidade

$$
\begin{aligned}
dM/dt &= b(N-S) - (\delta + d)M,\\
dS/dt &= bS + \delta M - \beta SI/N - dS,\\
dE/dt &= \beta SI/N - (\varepsilon + d)E,\\
dI/dt &= \varepsilon E - (\gamma + d)I,\\
dR/dt &= \gamma I - dR,\\
dN/dt &= (b-d)N.
\end{aligned}
$$

SIS: Hipóteses do modelo

- N : (população total) é constante
- As taxas de nascimentos e mortes são as mesmas.

i) Os recém nascidos são susceptíveis

ii)A população tem uma expectativa de vida tipo exponencial negativa (vida média : $1 / \mu$)

- A população é homogênea
- β é a probabilidade de contacto entre os indivíduos das populações
- Os indivíduos infectados são recuperados e eliminados da classe dos infectados
- Taxa de remoção dos infectados: $\mu + \gamma$