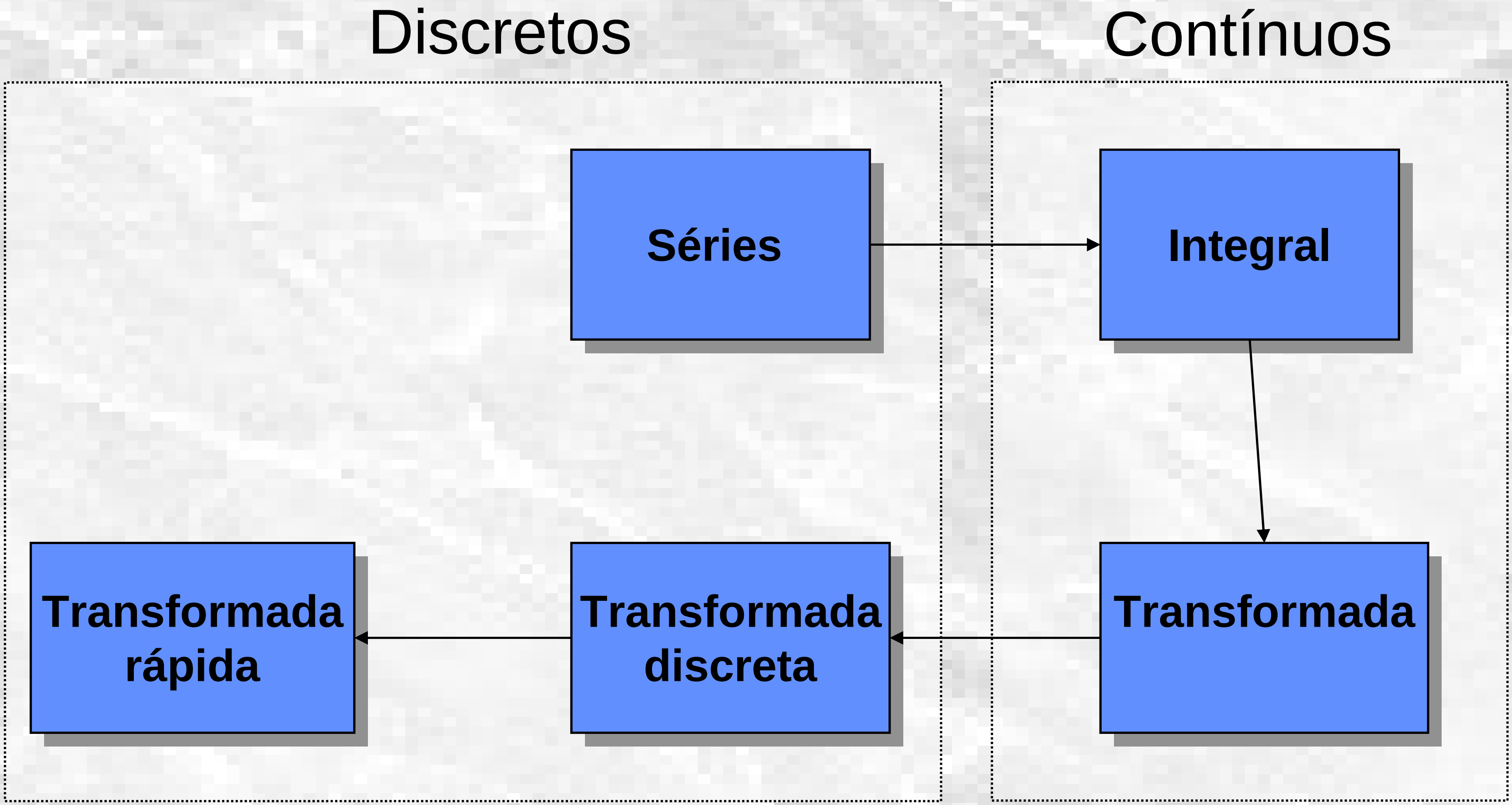
# Séries de Fourier

# Análise de Fourier



# Uma revisão

- Funções periódicas
- Séries de Fourier de senos e consenos
- Funções periódicas com período 2L
- Funções pares e ímpares
- Séries em senos e cosenos de médio rango
- Notação complexa da série de Fourier

# Fourier, Joseph

**Fourier, Joseph**
1768-1830

# Fourier, Joseph

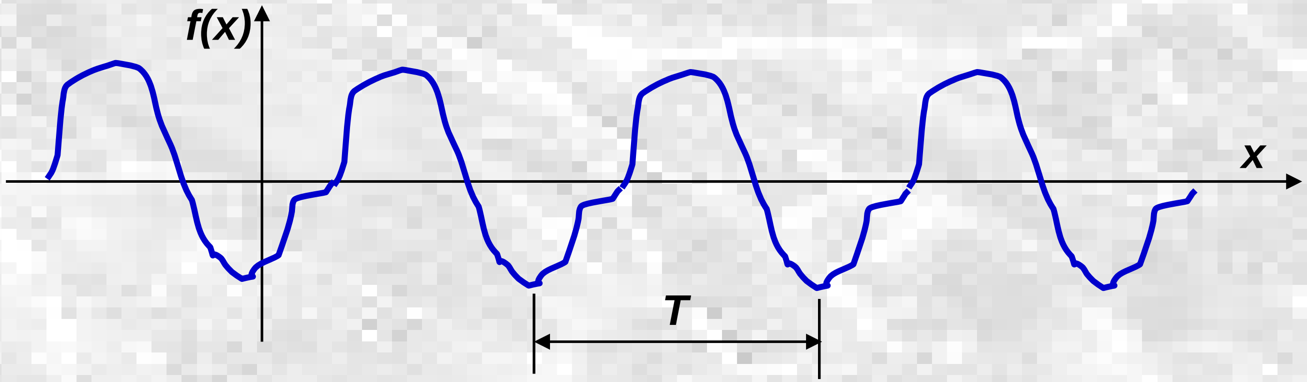
Em 1807, Fourier submeteu um trabalho á Academia de Ciências de Paris. Neste trabalho apresentou a modelagem da equação de calor e o método de separação de variáveis. O trabalho, avaliado por Laplace, Lagrange e Lagendre foi rejeitado por falta de rigor matemático. Entretanto, o resultado foi considerado promissório e a academia colocou premio para sua resolução. Em 1822, Fourier finalmente publicou sua clássico *Theorie analytique de la chaleur*, estabelecendo os fundamentos do método de separação de variáveis e as séries, integral e transformada de Fourier.

# Funções Periódicas

- Definição: Função Periódica

Uma função *f(x)* é dita ***periódica*** com período *T* se para todo *x*

$$f(x+T) = f(x)$$



# Funções Periódicas

- $f(x+p)=f(x)$, $f(x+np)=f(x)$
- Se $f(x)$ e $g(x)$ têm período $p$, então a função $H(x)=af(x)+bg(x)$ , também tem período $p$.
- O menor período de uma função $f(x)$, $p$ ($p$ >0), é chamado como *período fundamental de* $f(x)$

# Funções Periódicas

- Exemplos
  - Funções co-senos: $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, …
  - Funções senos: $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, …
  - $e^{ix}$, $e^{i2x}$, $e^{i3x}$, …
  - $e^{-ix}$, $e^{-i2x}$, $e^{-i3x}$, …

# Séries de Fourier de senos e co-senos

- Lema: Um base de funções Trigonométricas é ***Ortogonal*** se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, (any \ m, n)$$

# Séries de Fourier de senos e co-senos

- A representação de uma função *f(x)* (com período 2π) em senos e co-senos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \left[a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots\right] \\
&\qquad + \left[b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots\right] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)
\end{aligned}
$$

# Fórmulas de Euler

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

# Séries de Fourier de senos e co-senos

- Prova:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{a_n}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-n)x\,dx\right]$$

$$= \frac{a_n}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\,2\pi$$

$$= a_n$$

# Séries de Fourier de senos e co-senos

- Exemplo 1: Achar os coeficientes de Fourier para a função

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

***Solução:***

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

***Solução:***

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{k}{\pi}\left[\left.\frac{-\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**Solução:**

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-k)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} k \sin nx dx\right]$$

$$= \frac{k}{\pi}\left[\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right]$$

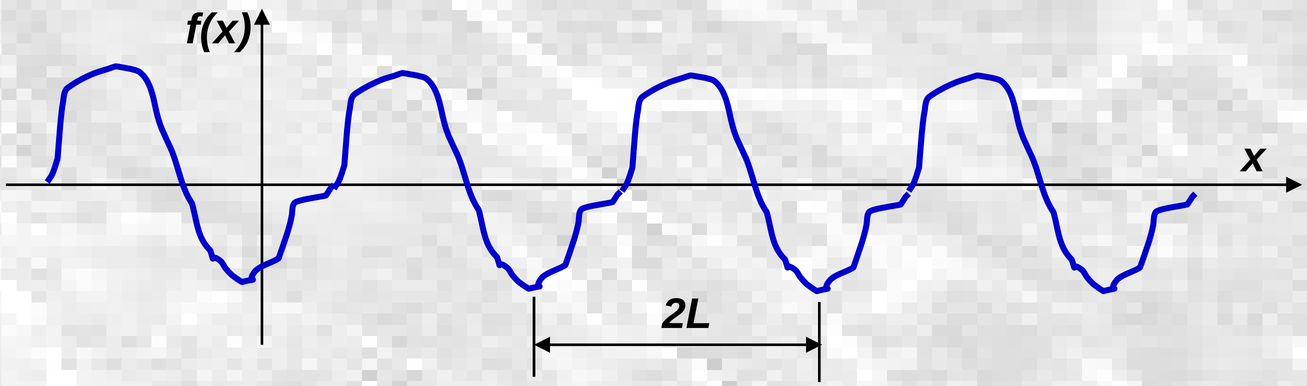
$$= \frac{2k}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$$1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2, \text{n} = 1,3,5, \cdots \\ 0, \text{n} = 2,4,6, \cdots \end{cases}$$

# Funções periódicas com período 2L

- Uma função periódica *f(x)* com período *2L*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$



- Logo

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

# Onda quadrada periódica

- Onda quadrada

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$p = 2L, \quad L = 2$$

# Funções pares e ímpares

- Dizemos que uma função *f(x)* é ***par*** se

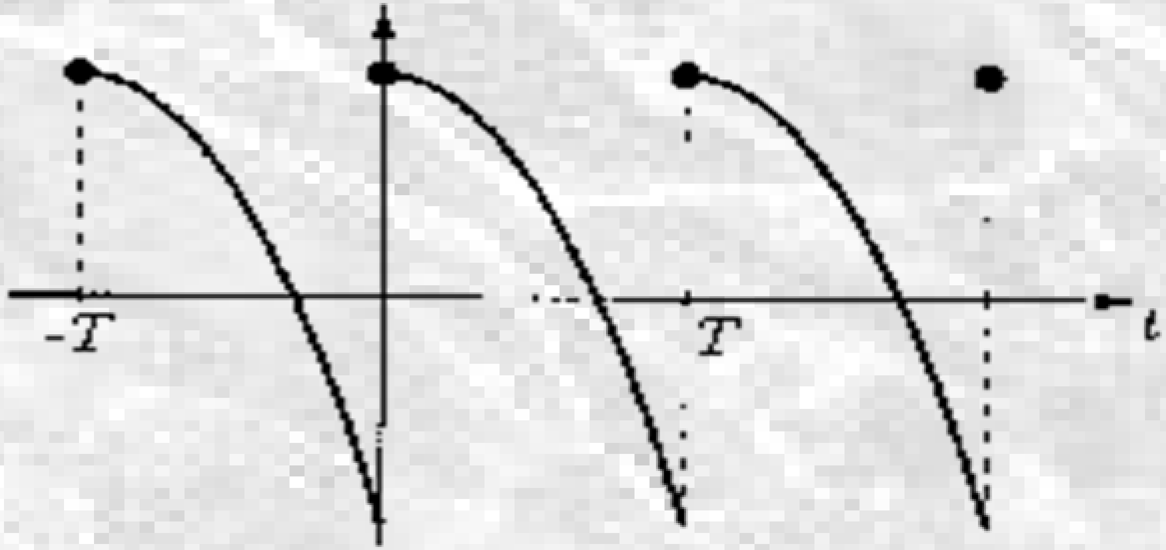
$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

- Dizemos que uma função *f(x)* é ***ímpar*** se

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

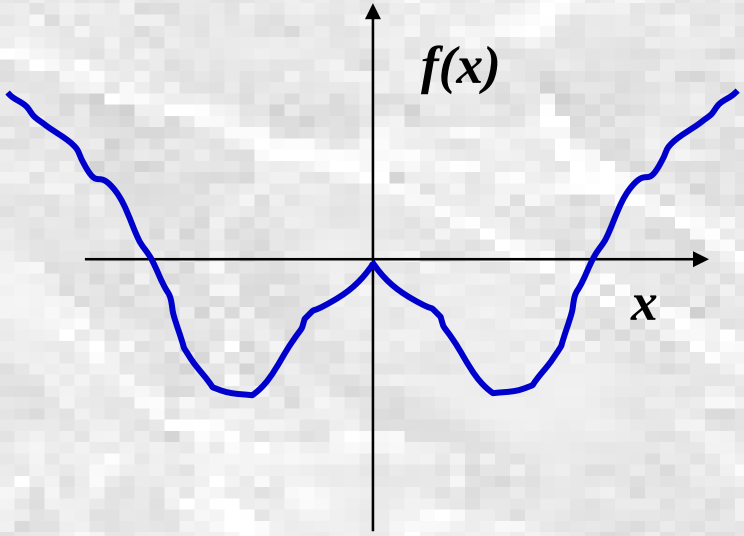
# A extensão periódica de *f*

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < T \\ \tilde{f}(t-T) & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



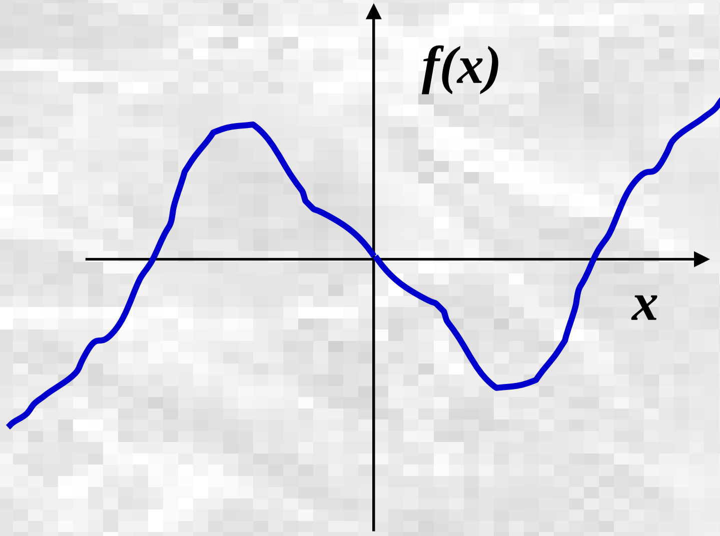
Par

$$f(-x) = f(x)$$




Ímpar

$$f(-x) = -f(x)$$



- Propriedades

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx, \text{ se } f(x) \text{ for par}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0, \text{ se } f(x) \text{ for ímpar}$$

- O produto de uma função para com uma ímpar é ímpar.

- Série de Fourier de Co-senos

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \text{ se } \quad f(x) \quad \text{é par}$$

- Série de Fourier de Senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ se } \quad f(x) \quad \text{é ímpar}$$

# Combinações de funções

- Os coeficientes da soma de $f_1+f_2$ são a soma dos correspondentes coeficientes de Fourier de $f_1$ e de $f_2$.

- Os coeficientes de Fourier de $cf$ são $c$ vezes os correspondentes coeficientes de Fourier de $f$.

# Teorema de convergência de Fourier

- Seja *f(x)* periódica de período *2L* com primeiras derivada contínua em *[-L,L]*, exceto possivelmente em um número finito de pontos. Então, para qualquer *x* em (*-L,L*) onde *f(x)* e *f'(x)* são contínuas temos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right))$$

ou

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right))$$

**Exemplo: obter a SF de:** $f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x < \pi \\ -1 & ,\pi \le x < 2\pi \end{cases}$

Como *f* é ímpar também $f(x)\cos nx$ e então $a_0 = 0$ e

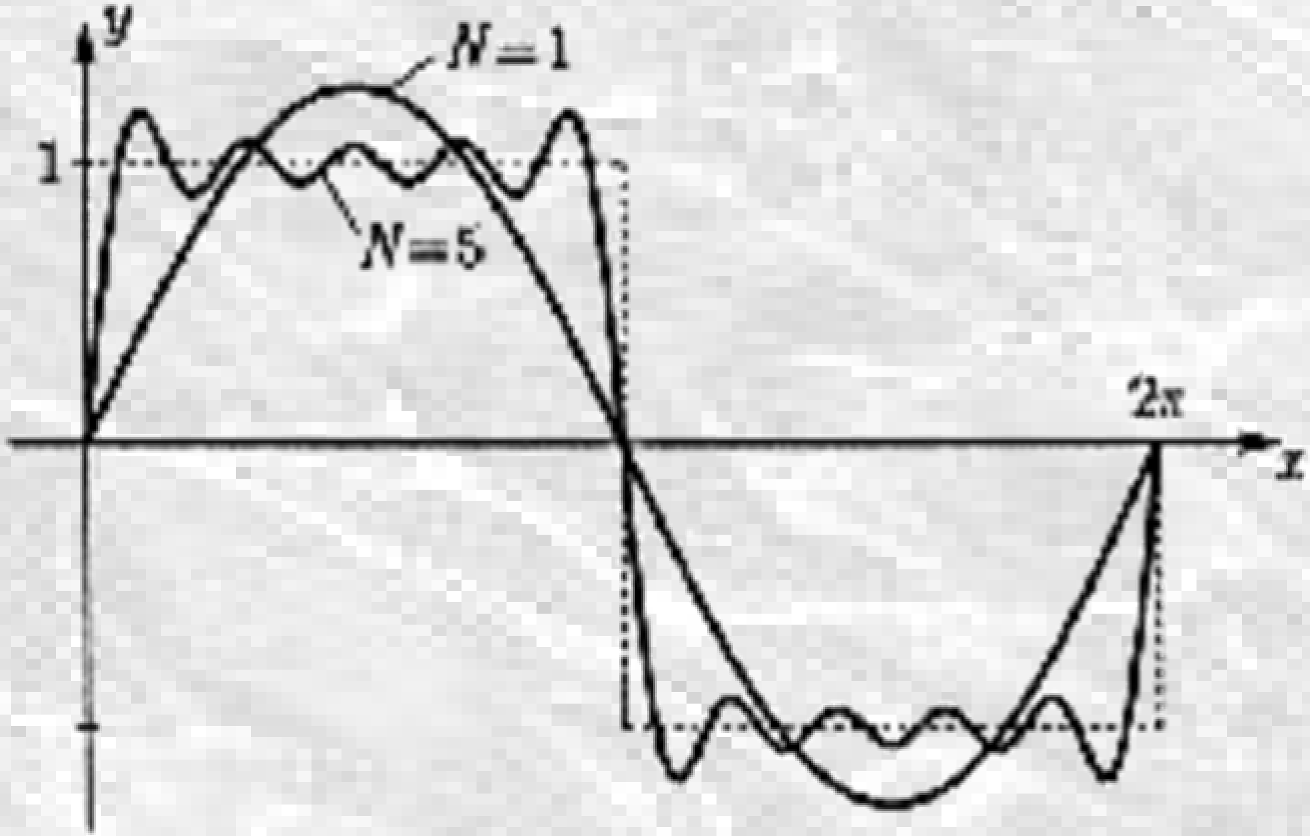
$$a_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin nx\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

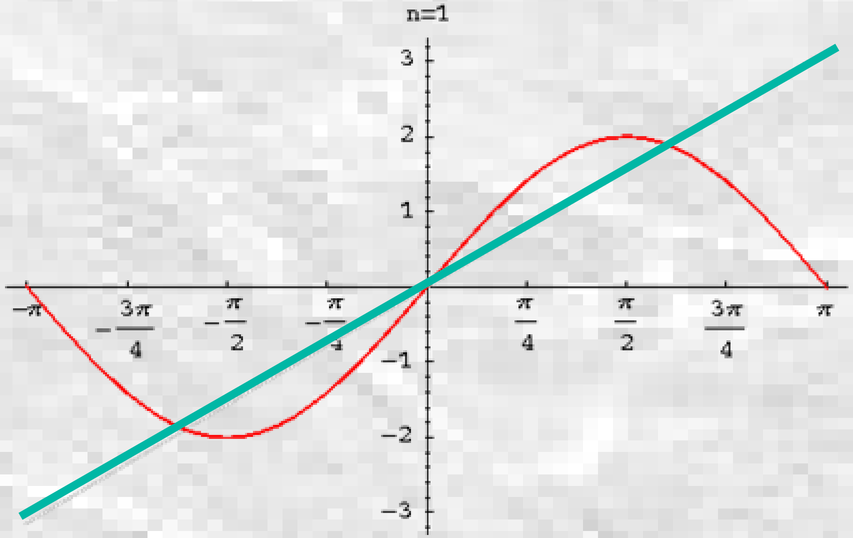
Assim temos que

$$f \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

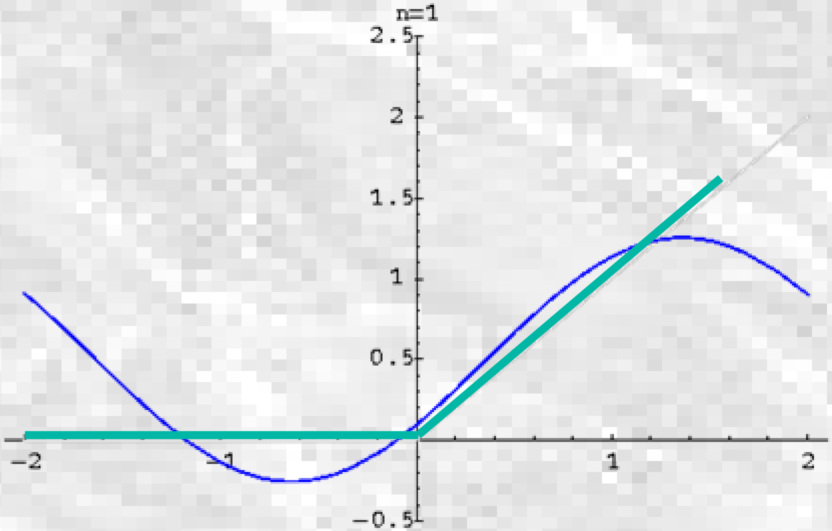


y
N=1
1
N=5
2π
x

# exemplos

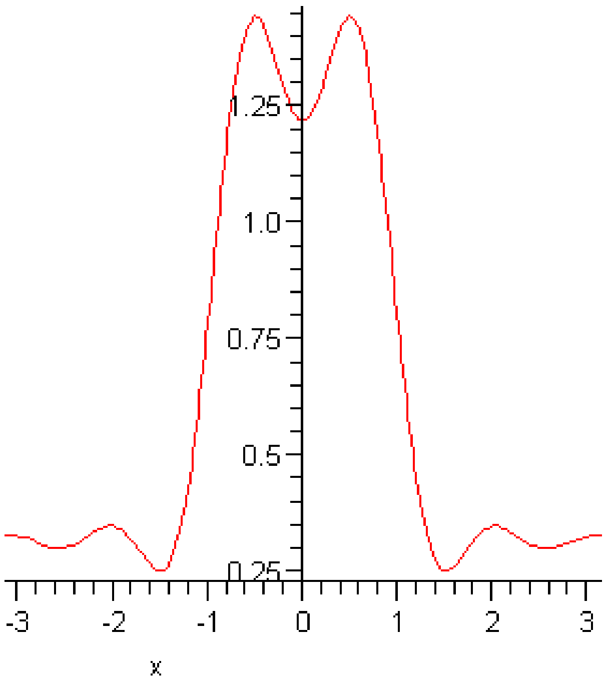



$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

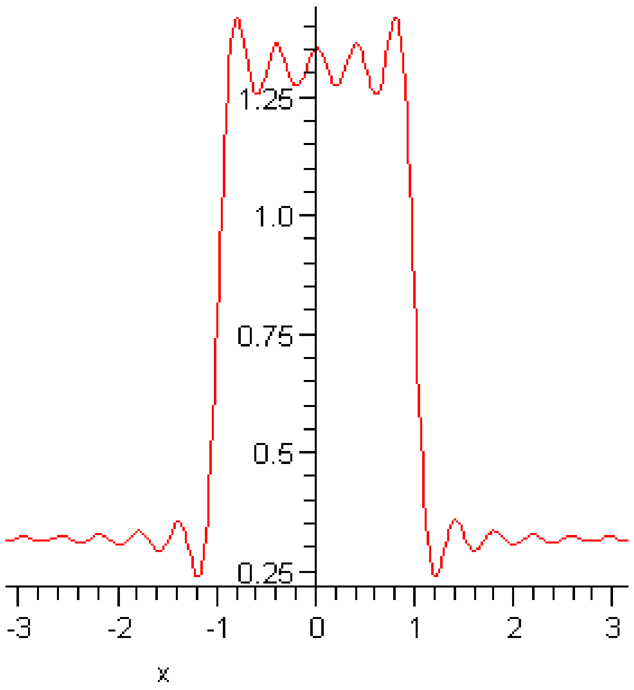



$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

**degrau unitário** : $f(x)=1$ sempre que $-1<x<1$ , senão $f(x)=0$



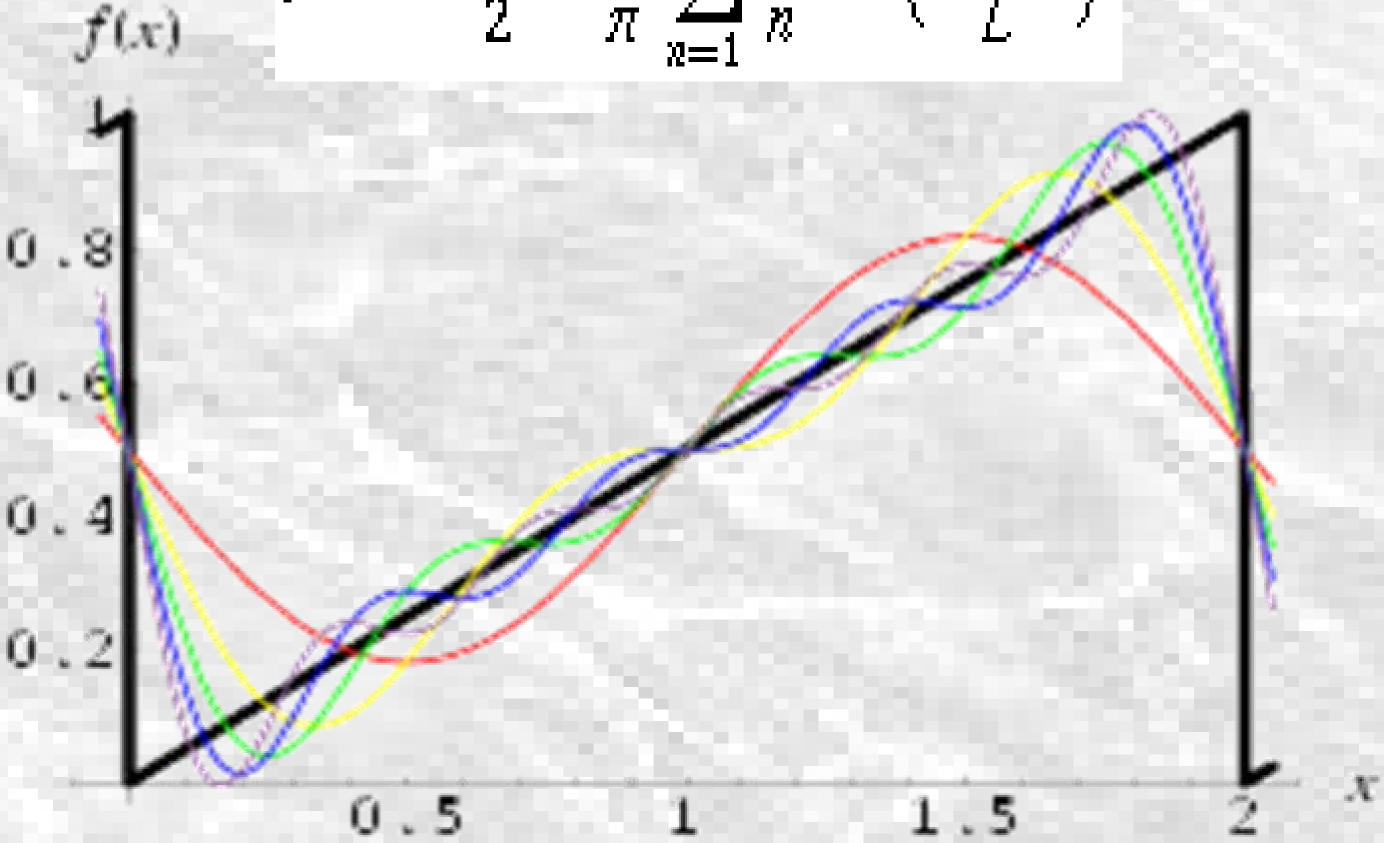

6 termos




15 termos

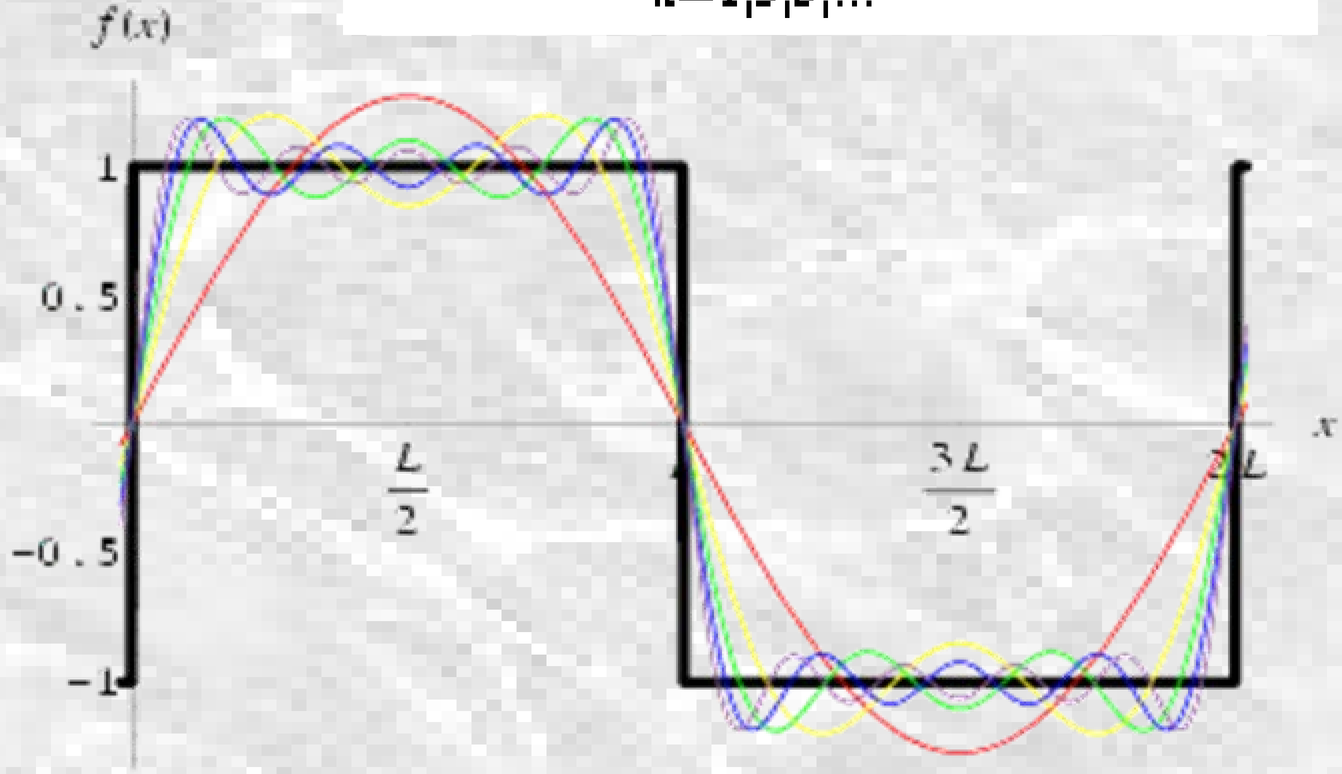
**dente de serra:** $f(x) = \frac{x}{2L}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$



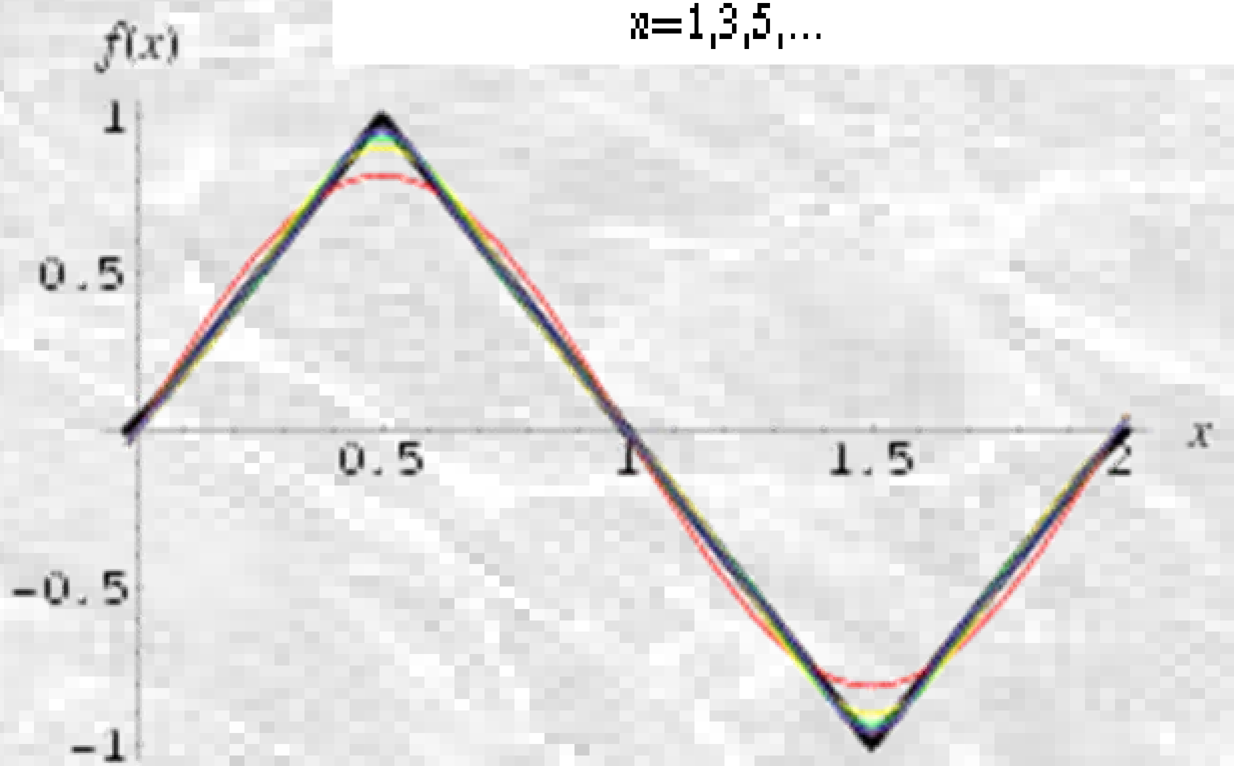
**onda quadrada:** $f(x) = 2\left[H(x/L) - H(x/L-1)\right] - 1,$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$



# onda triangular:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$



# Forma complexa para a Série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

- E para uma função periódica *f(x)* com período 2L

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$