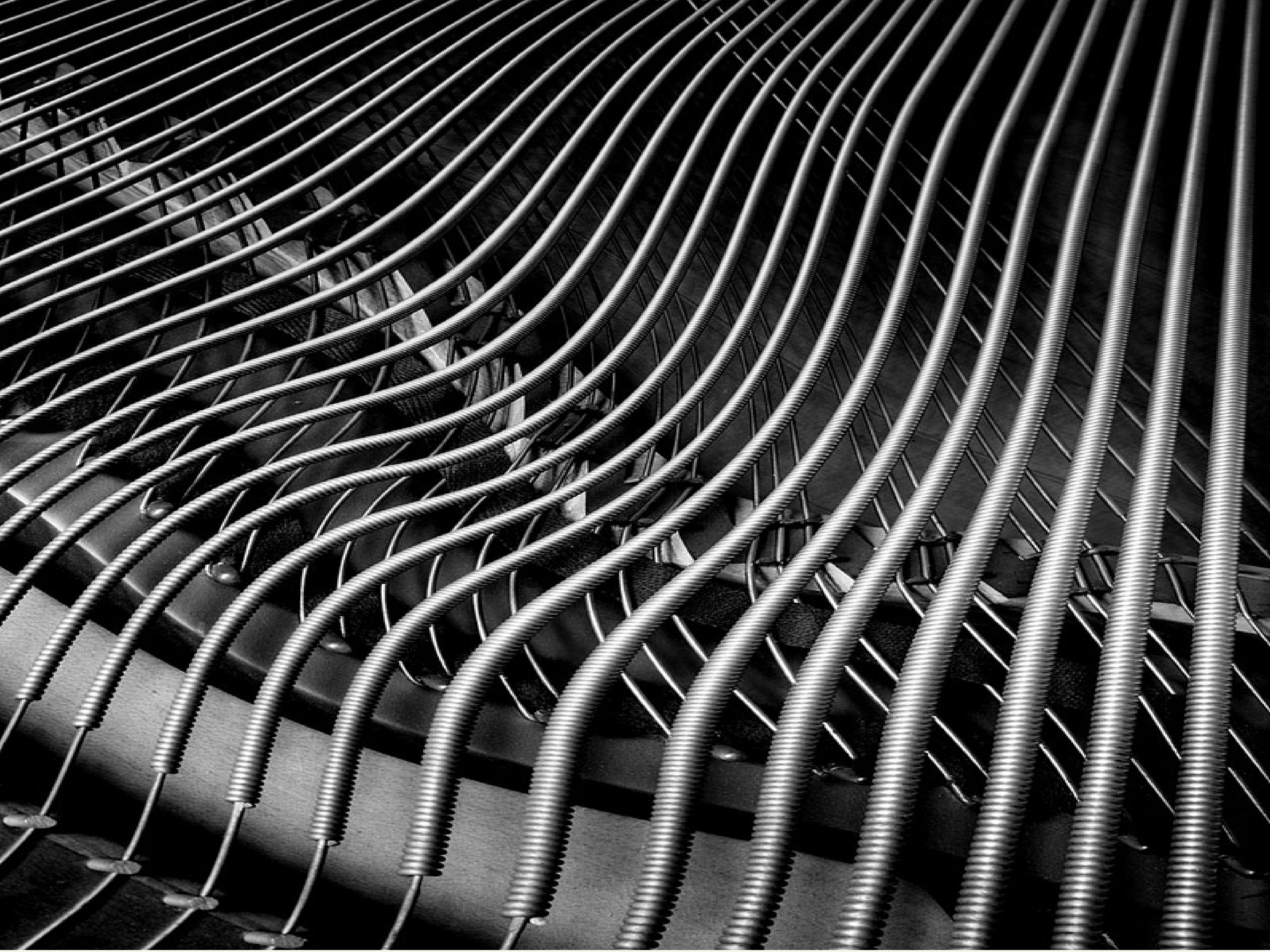
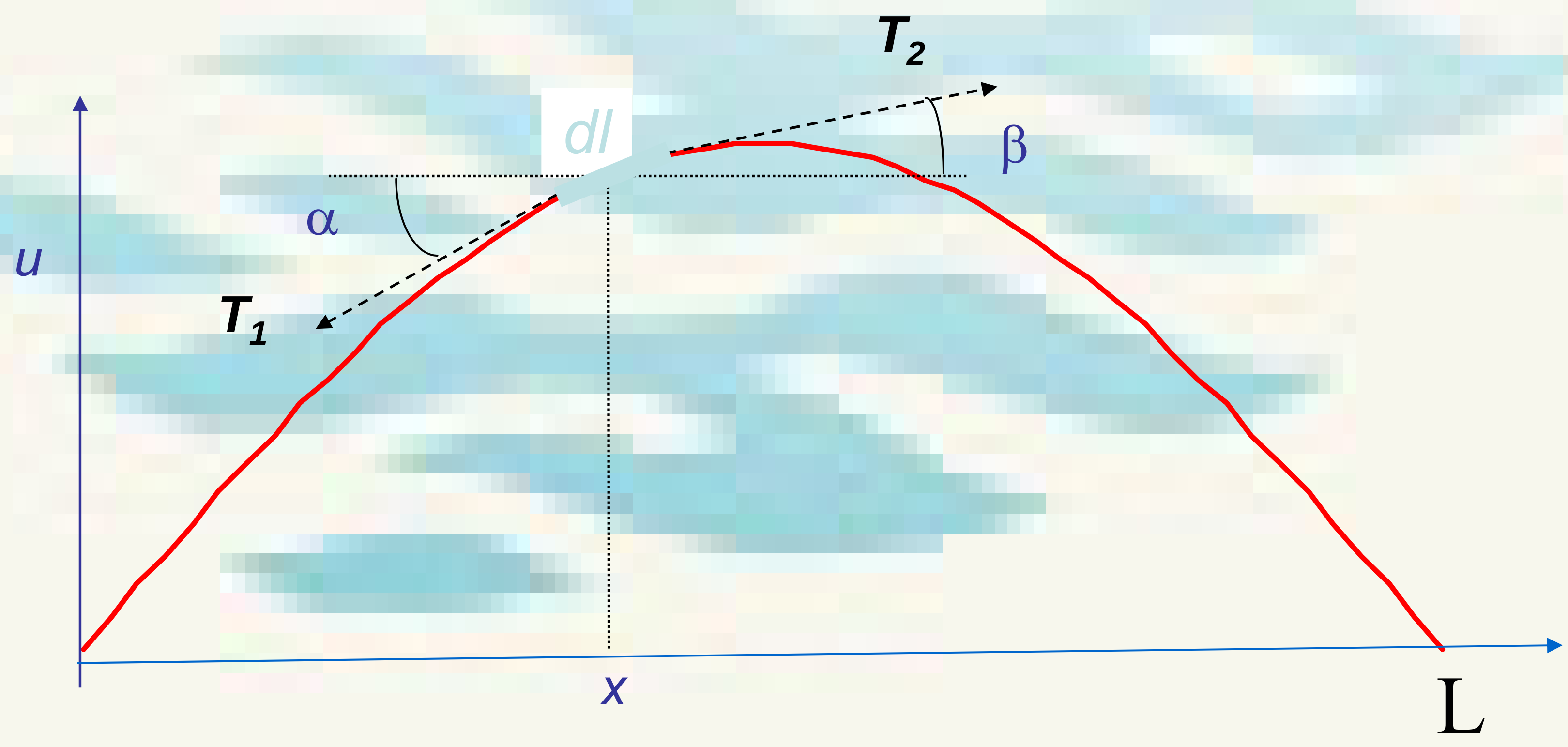


DINÂMICA DA CORDA VIBRANTE

A equação da onda unidimensional: por que deveríamos estudar o deslocamento de uma corda

Considere uma corda de comprimento L, levemente esticada:

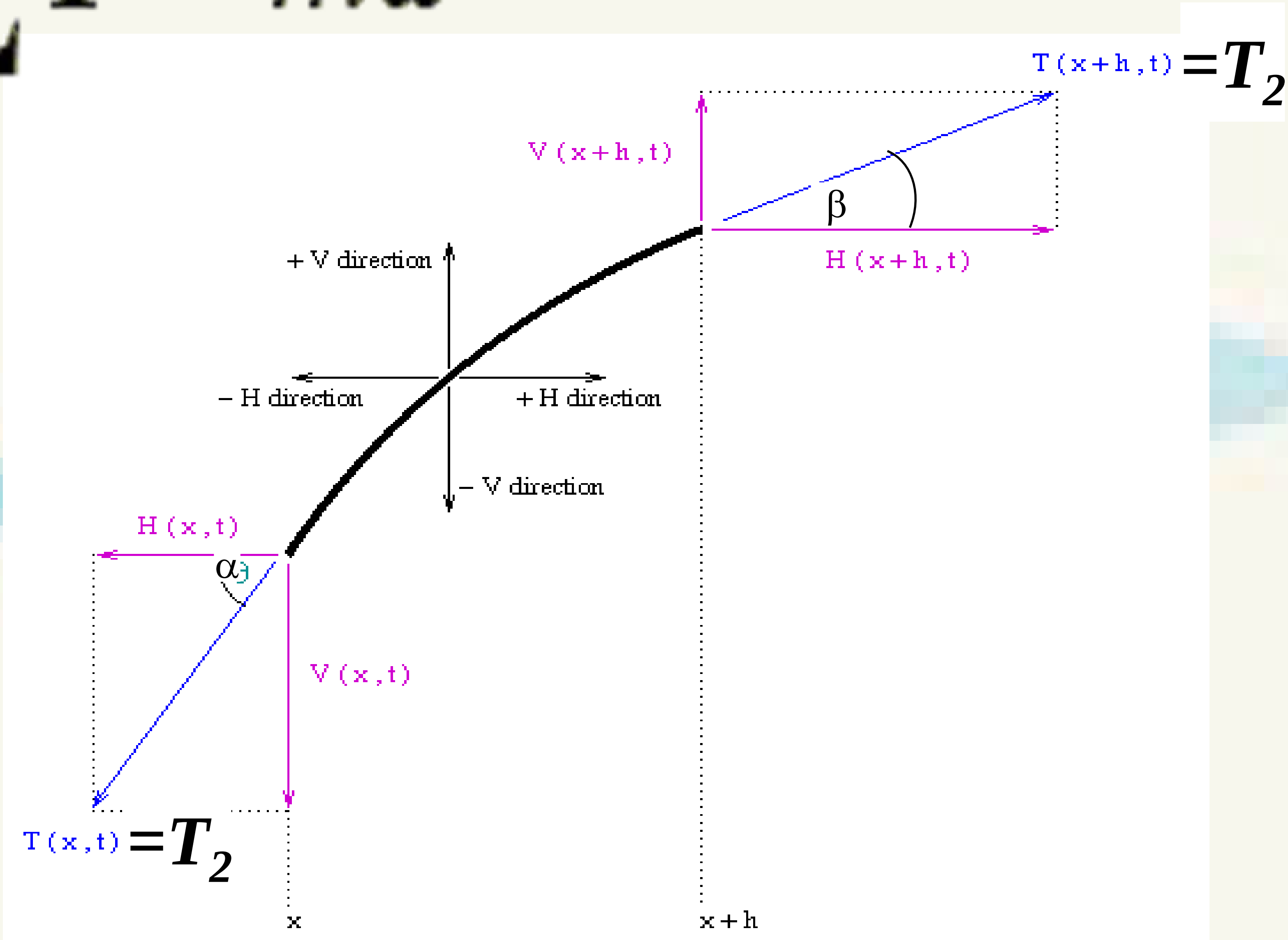
Na figura o deslocamento *u* tem sido propositalmente exagerado... α e β são próximos de zero.



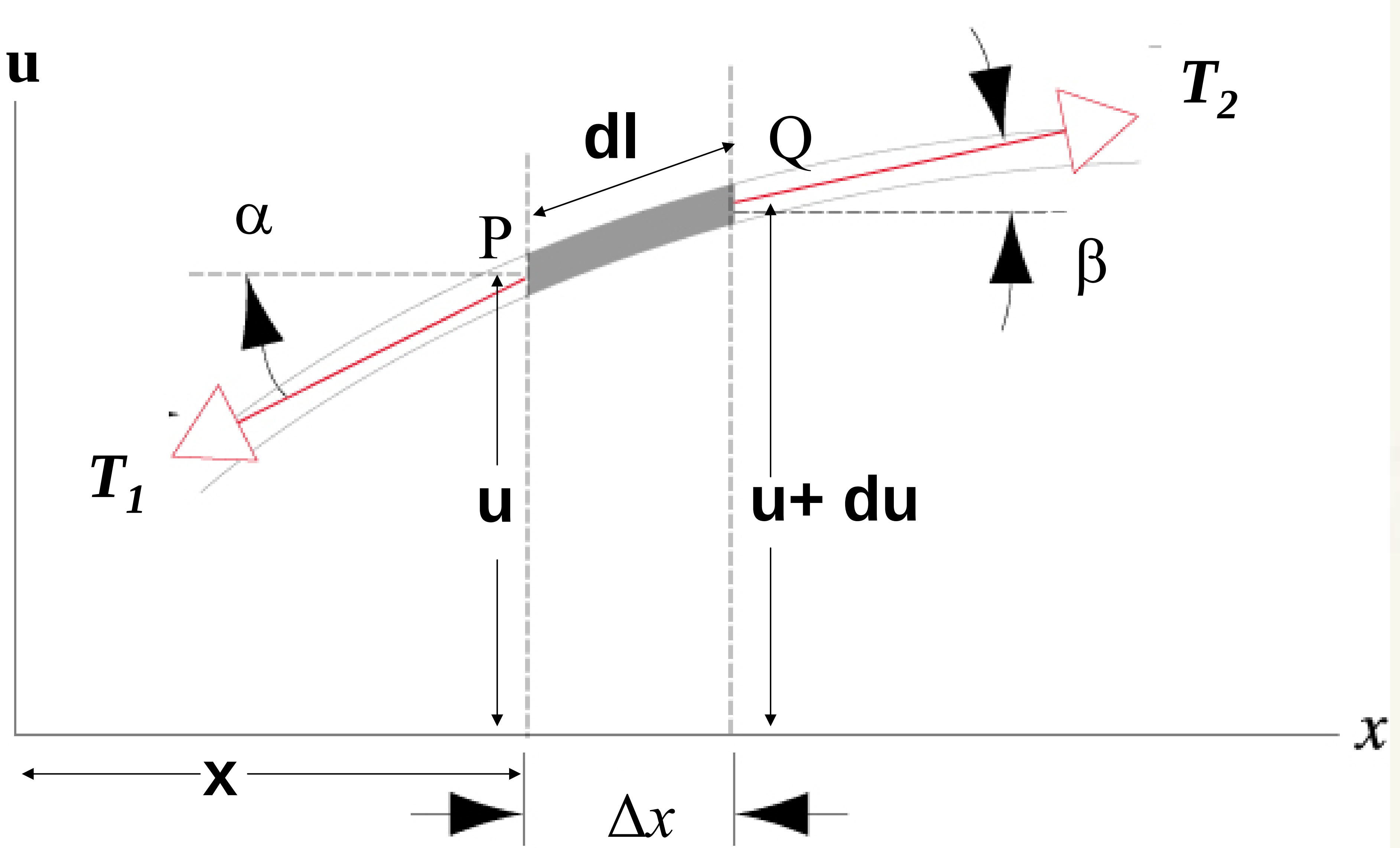
Hipóteses simplificadoras

- **i)** a corda tem um comprimento fixo L;
- **ii)** a tensão é constante ao longo da corda e do tempo;
- **iii)** a densidade da corda é constante ao longo da corda e do tempo;
- **iv)** os pontos da corda movimentam-se num plano
- **v)** a corda só está sujeita à força de reação nos seus extremos;
- **vi)** a velocidade de cada ponto é perpendicular a reta que passa pelos seus pontos extremos (eixo das abscissas),

$$\sum F = ma$$



T (x+h, t) = T2
V (x+h, t)
β
H (x+h, t)
+ V direction
− H direction
+ H direction
− V direction
H (x, t)
α
V (x, t)
T (x, t) = T2
x
x+h



u
dl
Q
T_2
α
P
β
T_1
u
u+ du
x
x
Δx

A equação da onda 1-D

A equação da onda unidimensional envolve apenas uma única variável espacial.

Desde que assumimos que o deslocamento é vertical as componentes horizontais são constantes e então iguais.

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = const\,.$$

As componentes da tensão na direção vertical são:

- T_1 sen α e T_2 sen β

Usando a Lei de Newton: $F = m\,a = (\,\rho\Delta x\,)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\boxed{T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Dividindo pela componente horizontal obtemos a inclinação local da corda:

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x + \Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x} \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ ou $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$ com $$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Resolução da Equação de Onda the 1-D

Condições de Fronteira:

$u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ para todo t desde que os extremos são fixos em 0 e em L

Condições Iniciais:

Deslocamento inicial,

$$u(x,0) = f(x)$$

Velocidade inicial,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{onde} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

1: Separação de variáveis → duas EDOs.

Propomos uma solução como sendo o produto de duas funções:

$$\boxed{u(x,t) = F(x)G(t)}$$

Diferenciando:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

Assim de $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

temos (substituindo) $$F(x)\ddot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\frac{F(x)\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)F(x)} = \frac{c^2 F''(x)G(t)}{c^2 G(t)F(x)} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

Ambos lados devem ser igual a uma constante porque variando apenas x ou apenas t não mudam ambos lados simultaneamente.

Obtemos duas EDOs:

$$\boxed{F''(x) - kF(x) = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0}$$

$$F''(x) - kF(x) = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0$$

2: Obter as soluções das EDOs que satisfaçam as condições iniciais e de fronteira:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0$$

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

<u>As soluções triviais são ignoradas:</u>

- $G(t) = 0$
- $F(x) = 0$ que é verdadeiro para $k \geq 0$

$$\boxed{F''(x) - kF(x) = 0}$$

para $k = -\rho^2$: $F''(x) + \rho^2 F(x) = 0$

cuja solução é

$$F(x) = A\cos\rho x + B\sin\rho x$$

Aplicando as condições de fronteira obtemos

$$F(0) = A = 0 \text{ e } F(L) = B\sin(\rho L) = 0$$

$\therefore$ $\underline{\rho L = n\pi}$ e escolhemos $\underline{B = 1}$

$$\boxed{F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x}$$ para $n = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\ddot{G}(t) - c^2 k G(t) = 0}$$

Já que $k = -\rho^2 = -(n\pi/L)^2$

$$\ddot{G}(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

A solução obtida analiticamente é:

$$G_n(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)$$

Assim as soluções da equação de Onda 1-D são:

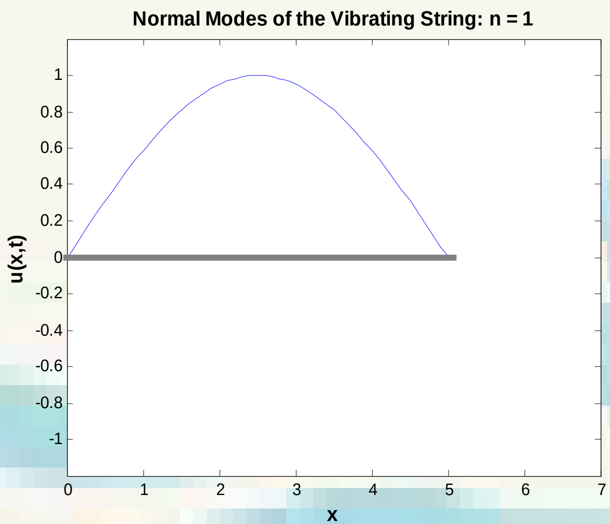
$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$$

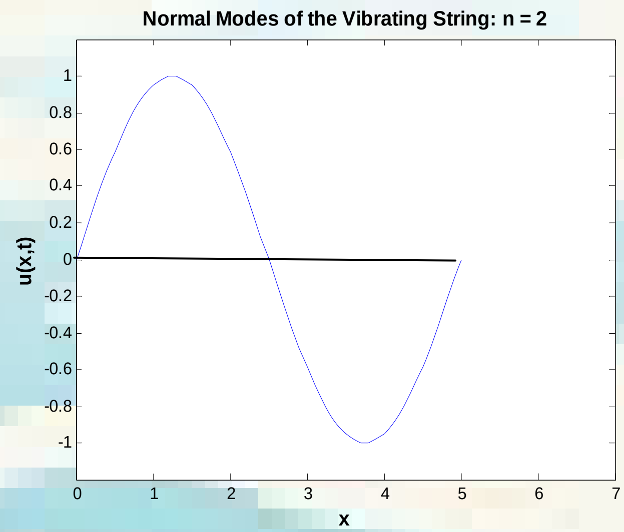
$$\boxed{u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

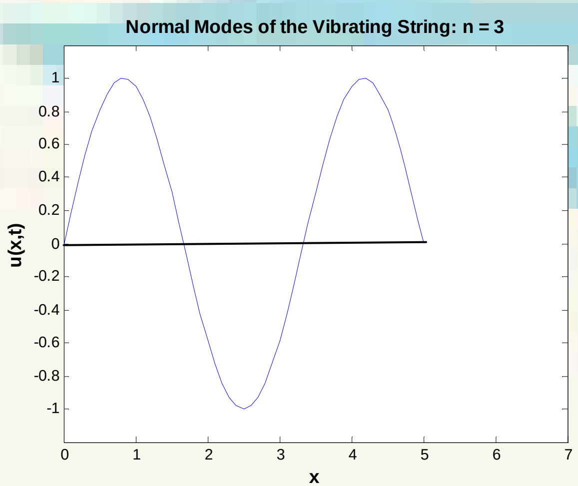
para $n = 1, 2, \ldots$

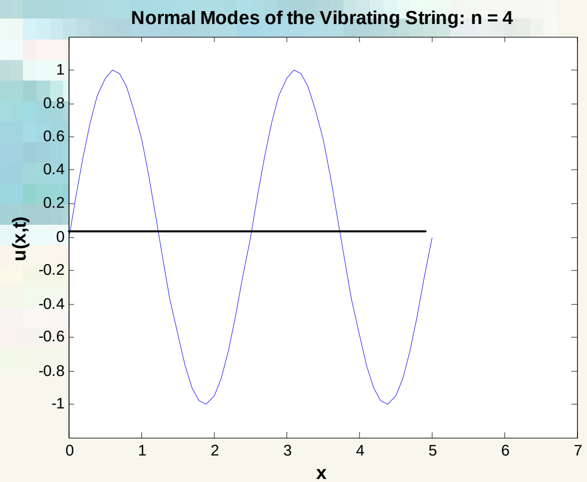
Gráficos da equação de Onda 1-D

instantâneas





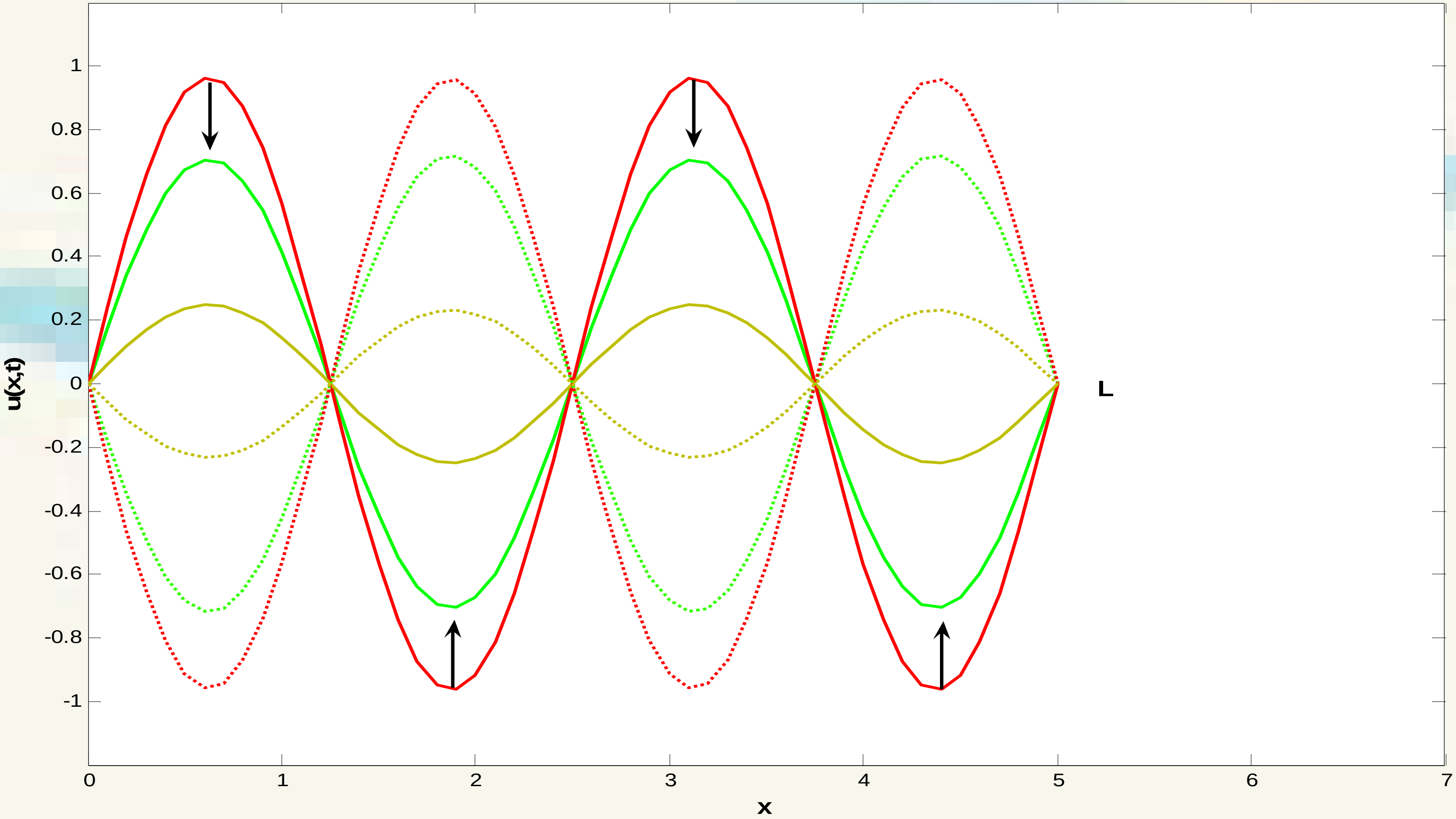




Para cada instante temos uma sinusóide;

a seta mostra o sentido do deslocamento

Modos normais de vibração, n = 4, para vários instantes de tempo



3 O Princípio de Superposição

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

precisamos de uma soma convergente que satisfaça as condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

Considerando a primeira condição inicial: Deslocamento

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

f(x) está dada por uma soma infinita de senos

Determinar B_n de tal forma que *u(x,0)* seja a Série de Fourier de *f(x)* (dada como a condição inicial do deslocamento)

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx}$$

Para satisfazer a segunda condição inicial: a velocidade, derivamos

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

em relação a *t*, e calculamos $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B^*{}_n\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x)$$

g(x) está dada por uma soma infinita de senos

Obter os coeficientes $B^*{}_n$ equivale a obter as Série de Fourier de *g(x)*

$$B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Temos um bom motivo para estudar como representar funções com séries infinitas de funções trigonométricas

As Séries de Fourier

Resolvendo a Equação de Onda Unidimensional

Consideremos primeiro a equação de onda com velocidade inicial nula, *g(x) =0*

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

assim

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi}{L}x$$

sendo

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Exemplo Ache a solução da equação de onda se o deslocamento inicial tem forma triangular e a velocidade é 0:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{for } 0 < x < L/2 \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & \text{for } L/2 < x < L \end{cases}$$

Como $g(x) = 0$, então $B_n{}^* = 0$ e $\quad B_n = \dfrac{8k}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

Assim, a solução tem a forma:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t + - \ldots\right]}$$

A solução da equação *u(x,t)*de onda é uma função de *x* e de *t*

Qualquer solução da equação de onda pode ser escrita como *u(x,t)= f*(x-ct)* que representa uma onda que se desloca para a direita com velocidade *c* no trasocorrer do tempo e *f*(x + ct)* representa uma onda que se desloca para esquerda. Pelo Princípio de Superposição temos que *u(x,t)* pode ser escrita em uma forma compacta como:

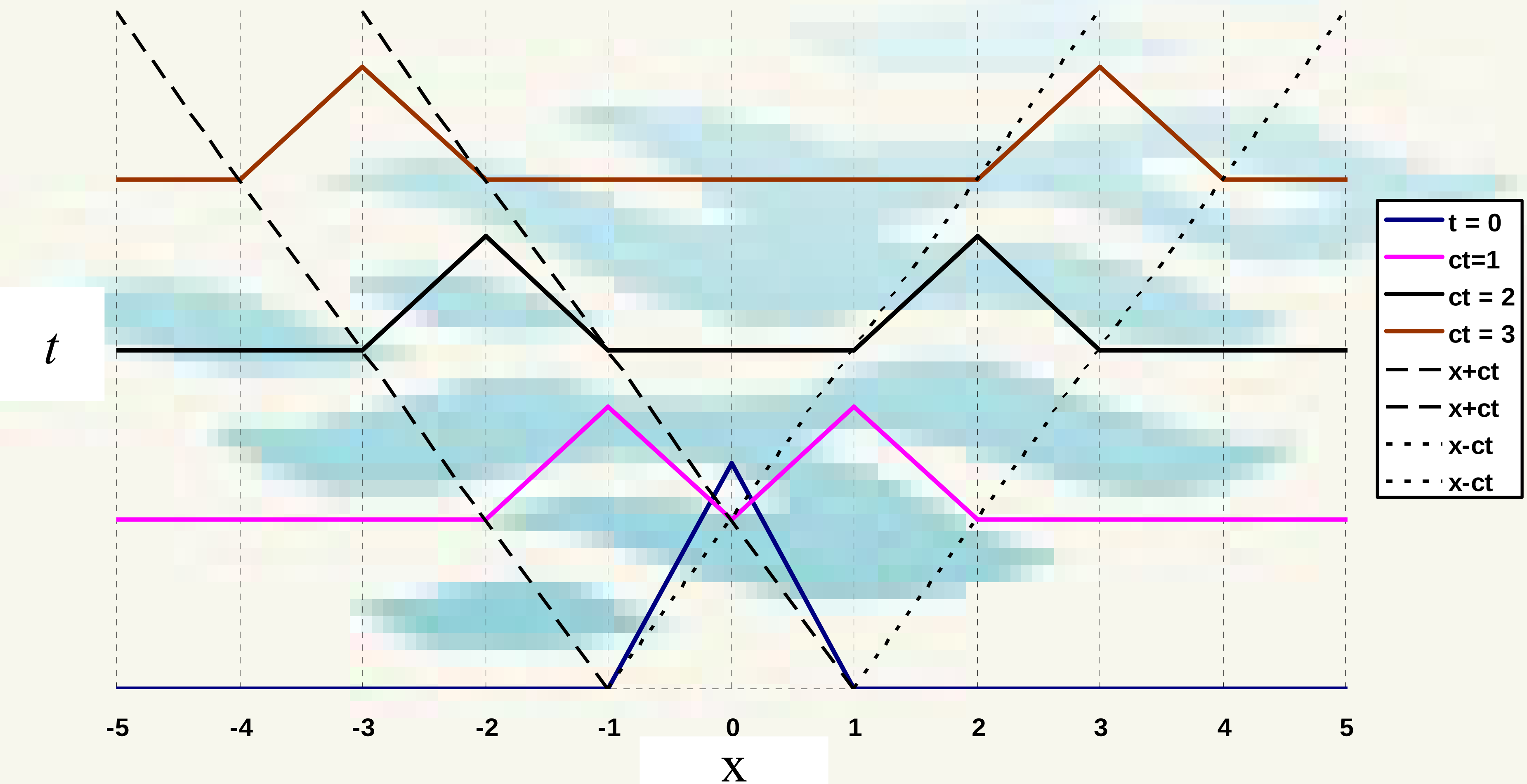
$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^{*}(x-ct)+f^{*}(x+ct)\right]}$$

Onde f^* é uma extensão periódica impar de f com período $2L$

Exemplo

$g(x)=0$ para todo x

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x\le 0 \\ 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$



Solução da equação de onda: D'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Introduzimos novas coordenadas: v e z

$$v = x + ct$$

$$z = x - ct$$

Assim, u é uma função de v e z. E as derivadas são:

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

e

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

Substituindo $\mathbf{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$ temos:

$$c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}) = c^2(u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zx})$$

$$4u_{vz} = 0 \Rightarrow u_{vz} = 0$$

$$\boxed{u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0}$$

$$\boxed{u_{vz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0}$$

Integrando em relação a z obtemos: $\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$

Integrando em relação a v temos: $u = \int h(v)dv + \psi(z)$

logo: $u = \phi(v) + \psi(z)$

que leva a solução: $\boxed{u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)}$

e $\boxed{u_t(x,t) = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)}$

D'Alembert's satisfazendo as condições iniciais

Temos que: $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t(x,t)\big|_{t=0} = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x)$$

Dividindo por c e integrando em relação a x temos:

$$\phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \quad \text{onde} \quad k(x_0) = \phi(x_0) - \psi(x_0)$$

$$
\begin{array}{rl}
+ & \phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \\
 & \phi(x) + \psi(x) = f(x) \\
\hline
\end{array}
$$

Dividindo por 2: $\boxed{\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + \frac{1}{2} k(x_0)}$

$$
\begin{array}{rl}
 & \phi(x) + \psi(x) = f(x) \\
- & \phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \\
\hline
\end{array}
$$

Dividindo por 2: $\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds - \frac{1}{2} k(x_0)}$

A solução de D'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\phi(x+ct) &= \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(s)\,ds + \frac{1}{2}k(x_0) \\
\psi(x-ct) &= \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(s)\,ds - \frac{1}{2}k(x_0) \\
&= \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x_0} g(s)\,ds - \frac{1}{2}k(x_0)
\end{aligned}\right\} \text{Resultados anteriores}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+Ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds}$$