Introdução às

Equações Diferencias Parciais

Problemas com Valor de Fronteira e com Valores Iniciais

Conteúdo

Derivadas Parciais

Considere uma função de duas ou mais variáveis, por exemplo *f(x,y)*. Podemos calcular as derivadas em relação a cada uma dessas variáveis:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta, y) - f(x-\delta, y)}{2\delta}$$

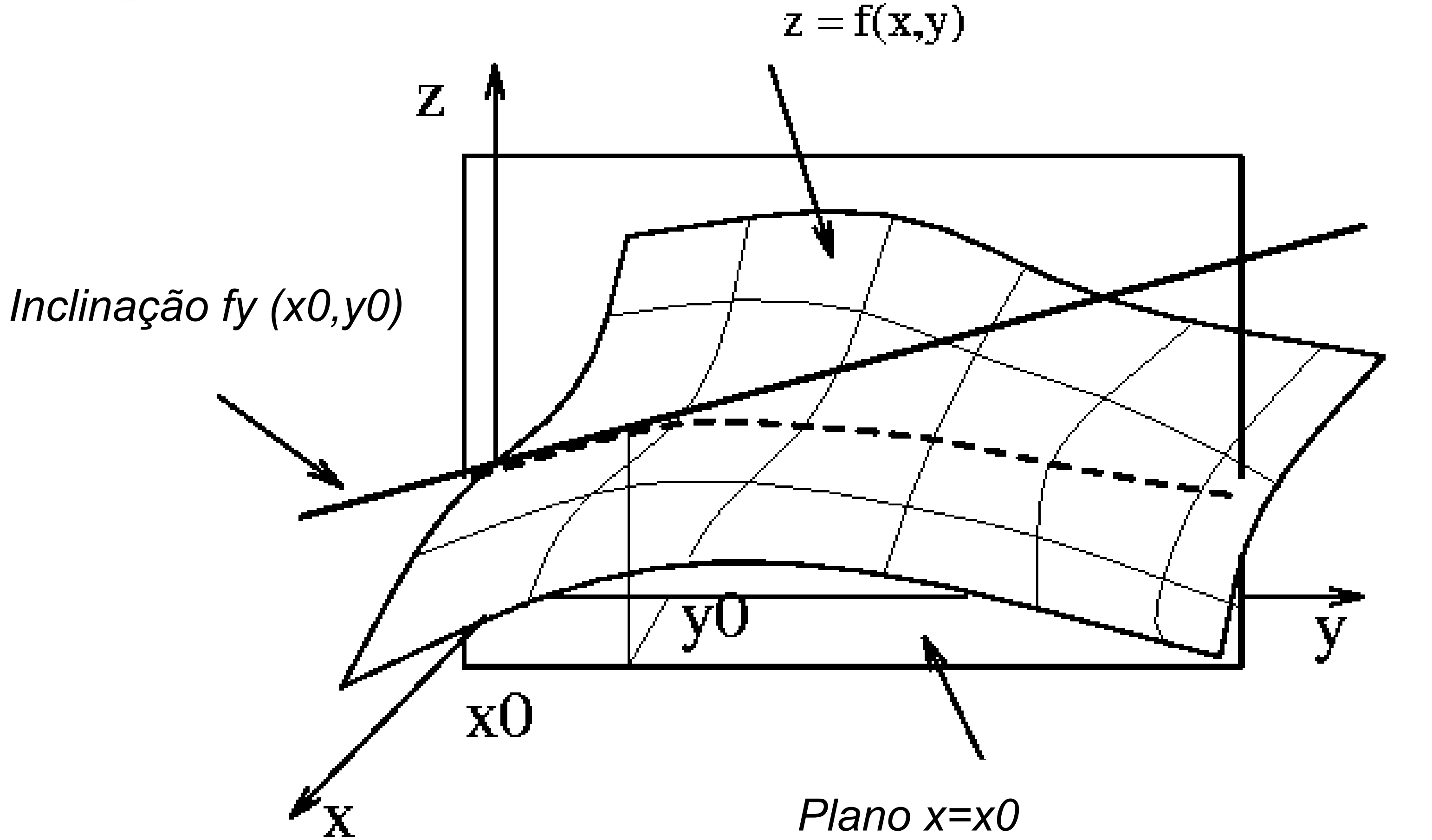
$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x, y+\delta) - f(x, y-\delta)}{2\delta} \qquad (1)$$

As derivadas parciais de maior ordem podem ser definidas recursivamente e incluem derivadas cruzadas:

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f_x(x, y+\delta) - f_x(x, y-\delta)}{2\delta}$$

Considere a função: $z = f(x,y)$ a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0,y_0) é denotada por $f_y(x_0,y_0)$. O número $f_y(x_0,y_0)$ é a inclinação da reta tangente no ponto (x_0,y_0,z_0) á curva situada na superfície $z=f(x,y)$. Esta curva é obtida pela intersecção do plano

$x=x_0$ com a superfície $z=f(x,y)$



Equações Diferencias Parciais

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que contém derivadas parciais de uma função incógnita de duas ou mais variáveis.

O estudo das EDP por Newton e Leibniz no século 17^{th} marcaram o começo de uma nova ciência.

- Mecânica dos fluidos
- Transferência de calor
- Modelos em águas rasas
- Modelos atmosféricos
- Modelos oceanografia
- Modelos populacionais
- Modelos em crescimentos de tecidos
- …..

Exemplos de quantidades dependentes do espaço e do tempo

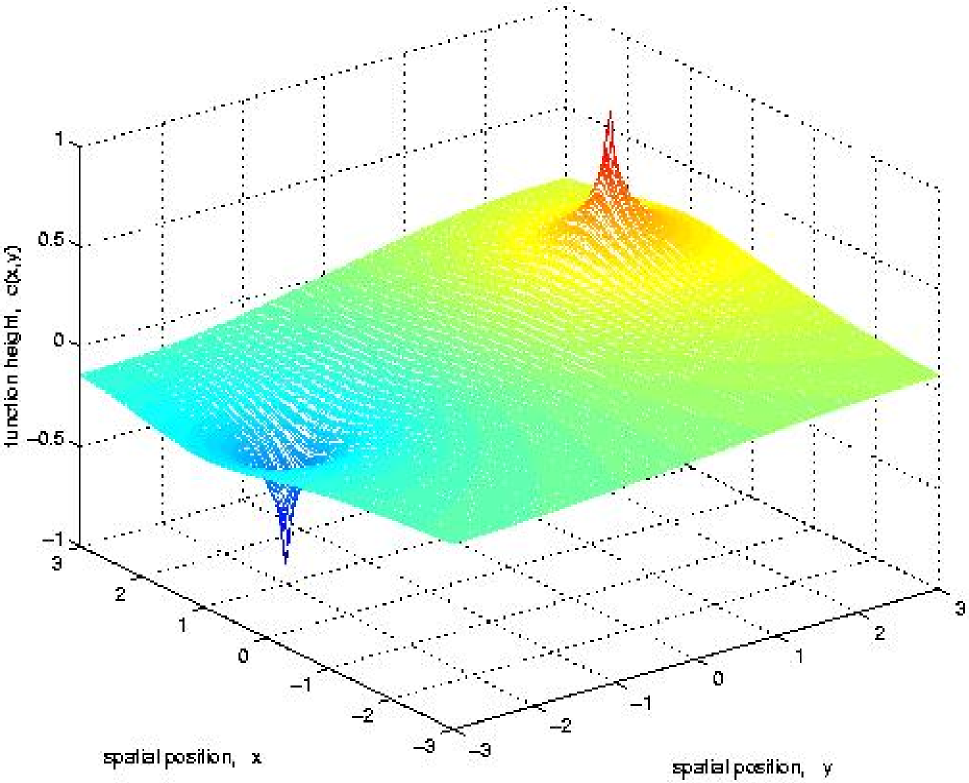
- *c(x,y,t)* = densidade populacional em um ponto (*x,y,t*) em um instante de tempo
- *S(x,t)* = concentração de uma substancia química em um ponto *x* e em um instante *t*
- *T(x,y,t)* = temperatura na posição (*x,y*) e no

instante *t*

- ***v****(x,y,z, t)* = velocidade na posição (*x,y,z*) e no

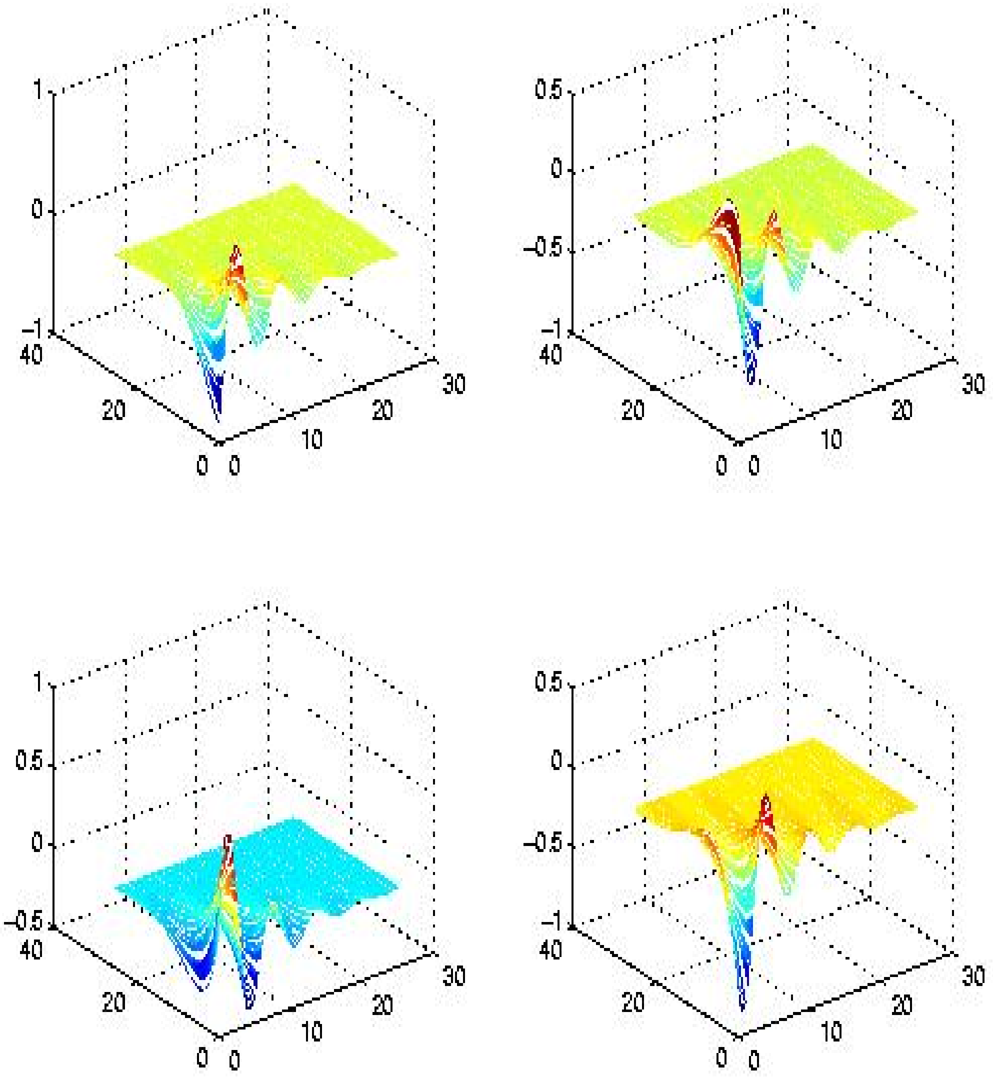
instante *t*

- O gráfico de *c(x,y)* pode ser visualizado como sendo a altura correspondente a cada ponto do plano *(x,y)* pela função, *c*.
- O gráfico de é uma superfície tridimensional



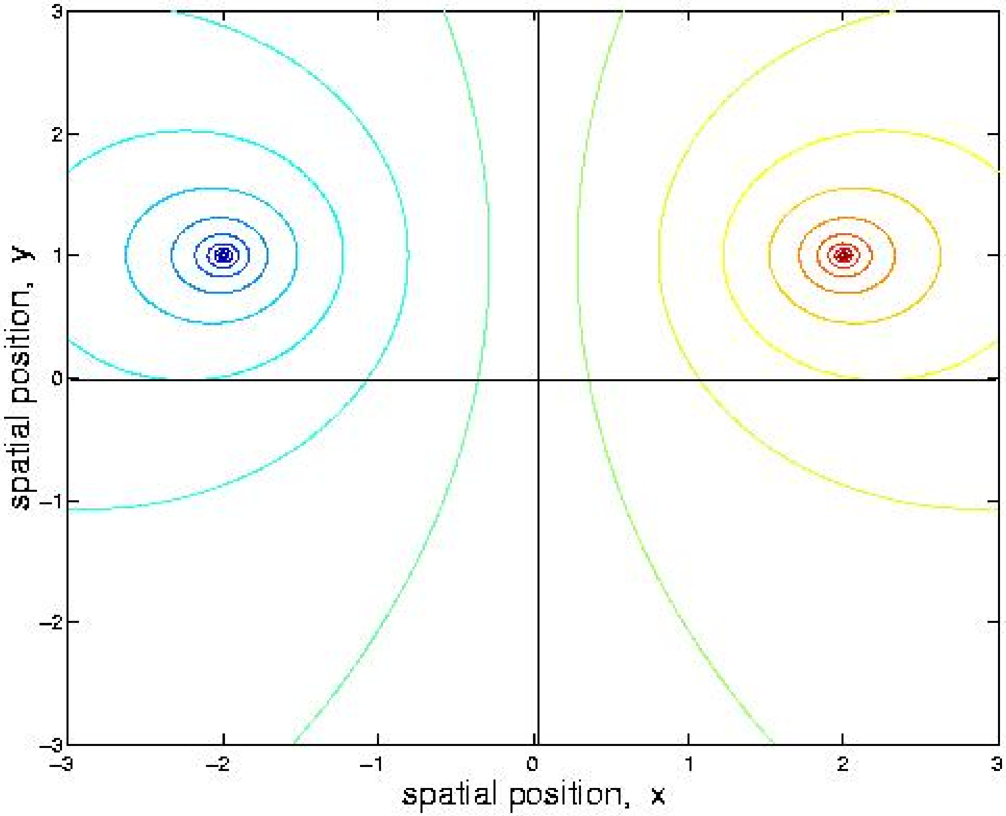
$$c(x,y) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$$

- Como poderíamos visualizar *T(x,y,t)*?
- Fazendo o gráfico da superfície *T(x,y)* para diferentes valores de *t*.



$$T(x,y,t) = \cos(ae^{-bt} - c(x+y)e^{-c(x+y)})$$

- Graficar *c(x,y) = k*
- Curvas de nível que representam pontos de igual densidade.



$$c(x,y) = \frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{(x-1)^2+(y+2)^2} = k$$

O que é uma EDP?

- Uma equação contendo uma o mais derivadas parciais de uma função (incógnita) de duas ou mais variáveis independentes

Qual é a ordem de uma EDP?

- A ordem de maior derivada

Homogênea vs. Não homogênea

- Se cada um das parcelas de uma EDP contém a variável dependente da equação ou alguma de suas derivadas a equação é homogênea ; senão é não homogênea.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial c^2} = 0$$

Homogênea

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} = f(a,b)$$

Não Homogênea

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

Homogênea

EDP´s (lineares) :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} = \mathrm{c}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

Onda 1-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Calor 1-D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Onda 2-D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Laplace 3-D

Clasificação de EDPs de 2ª Ordem

- Classificamos as cônicas $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ como sendo elipses/parábolas/hipérboles segundo o sinal do discriminante: b^2-4ac.
- Analogamente classificamos as EDPs de 2ª ordem

$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu+g=0$:

$b^2-4ac < 0$ – elíptica (equilíbrio)

$b^2-4ac = 0$ – parabólica (difusão)

$b^2-4ac > 0$ – hiperbólicas (ondas)

Em geral EDPs podem mudar de ponto a ponto

Para um problema determinado uma <u>solução única</u> pode ser obtida pela aplicação de :

condições de fronteira

condições iniciais

Princípio de Superposição (linearidade):

Se u_1 e u_2 são soluções de uma EDP linear e homogênea em uma região R, então

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

também é solução.

Problema com valor de Fronteira

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Determine *a* e *b* para a equação de Laplace 2-D .

Solução: $u(x,y) = a\ln(x^2 + y^2) + b$.

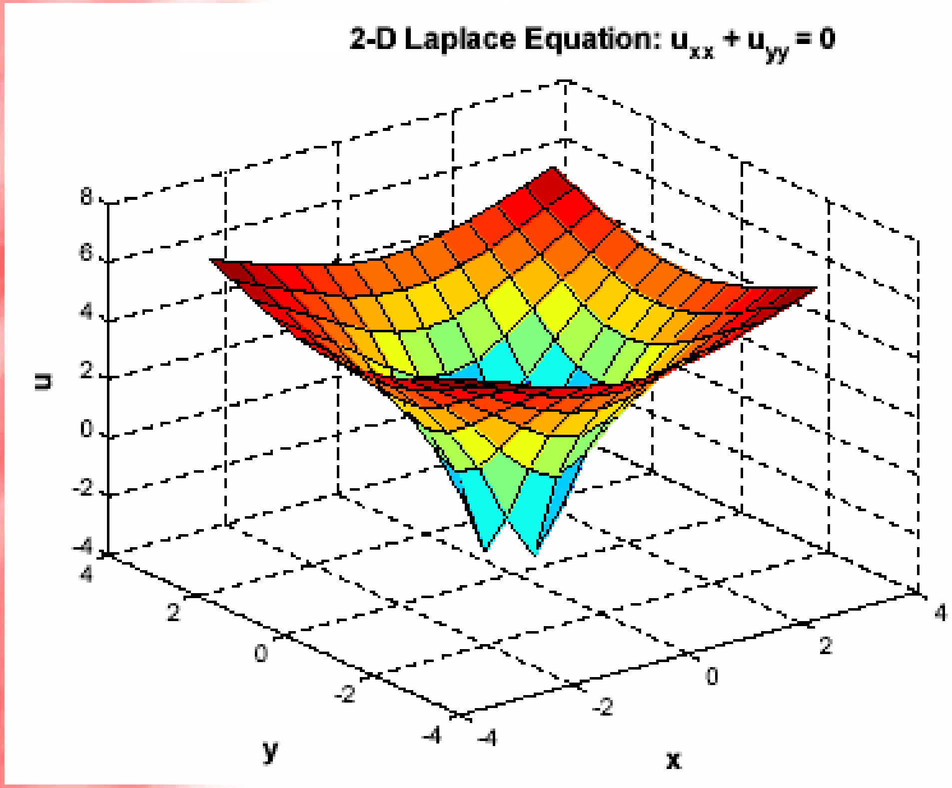
u = 0 $x^2 + y^2 = 1$

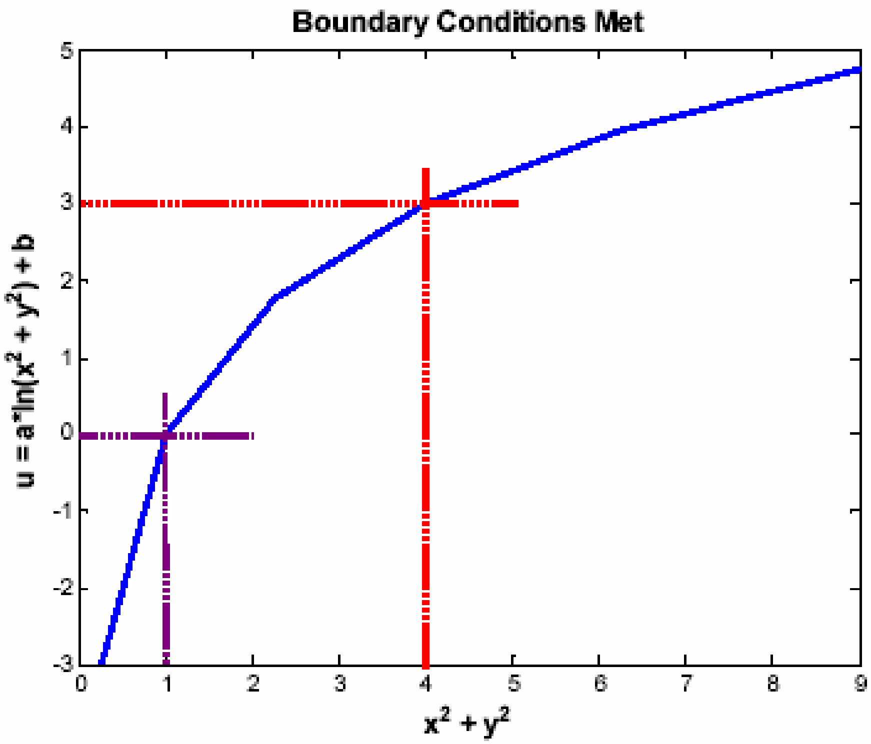
u = 3 $x^2 + y^2 = 4$.

$$a\ln(1) + b = 0 \qquad b = 0$$

$$a\ln(4) + b = 3 \quad \text{so} \quad a = 3/\ln(4) = 2.1640$$

Solução:


2-D Laplace Equation: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
u
8
6
4
2
0
-2
-4
4
2
0
-2
-4
y
-4
-2
0
2
4
x


Boundary Conditions Met
$u = a*\ln(x^2 + y^2) + b$
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$x^2 + y^2$

Operadores Diferenciais

Um vetor que contém as primeiras derivas ou o ***gradiente*** de uma função:

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Assim, **nabla** define o gradiente:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

A soma das segundas derivadas de uma função *f(x,y,z)*, formalmente obtida como o produto escalar de dois gradientes é chamado de **Laplaciano**:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

•A **divergência** de uma função vetorial ***f***(x,y,z)=[($f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, $f_3(x,y,z)$)] é a soma das primeira derivadas ou, equivalentemente o produto escalar de ***f*** com nabla:

$$\mathbf{div}\ f \equiv (\nabla, f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

•O **rotor** de uma função vetorial é o produto vetorial com nabla:

$$\mathbf{rot}\ f \equiv [\nabla \times f] = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(\vec{x}) & f_2(\vec{x}) & f_3(\vec{x}) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Várias igualdades podem ser derivadas a partir dos operadores gradiente, divergência, rotor e Laplaciano.

Exemplos: Dinâmica dos Fluidos
A Equação de Navier-Stokes

- Equação de Navier-Stokes :

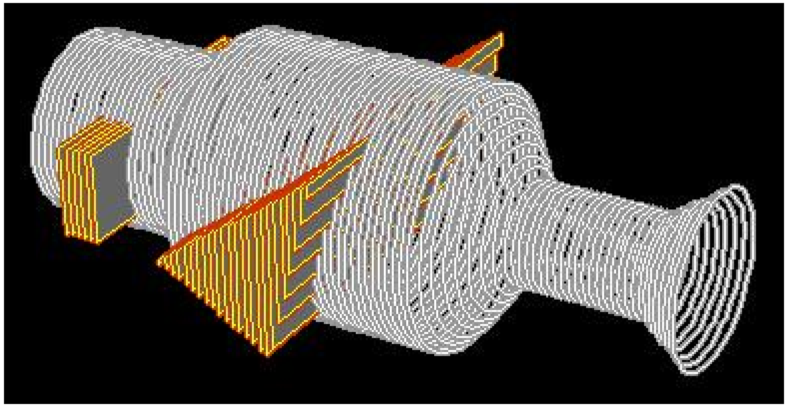
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} + v\nabla^2\mathbf{u} - \frac{1}{d}\nabla p + \mathbf{f}$$

onde **u:** campo de velocidades, *p:* pressão*; v* :Viscosidade, *d* : densidade; **f:** forças externas

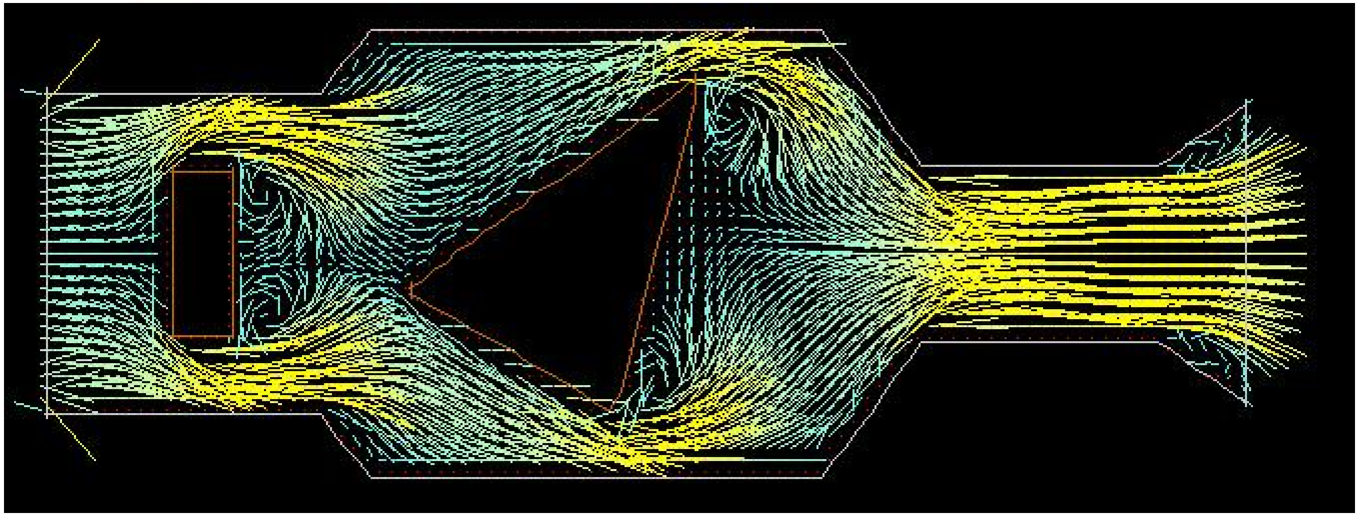
- Conservação de Massa :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

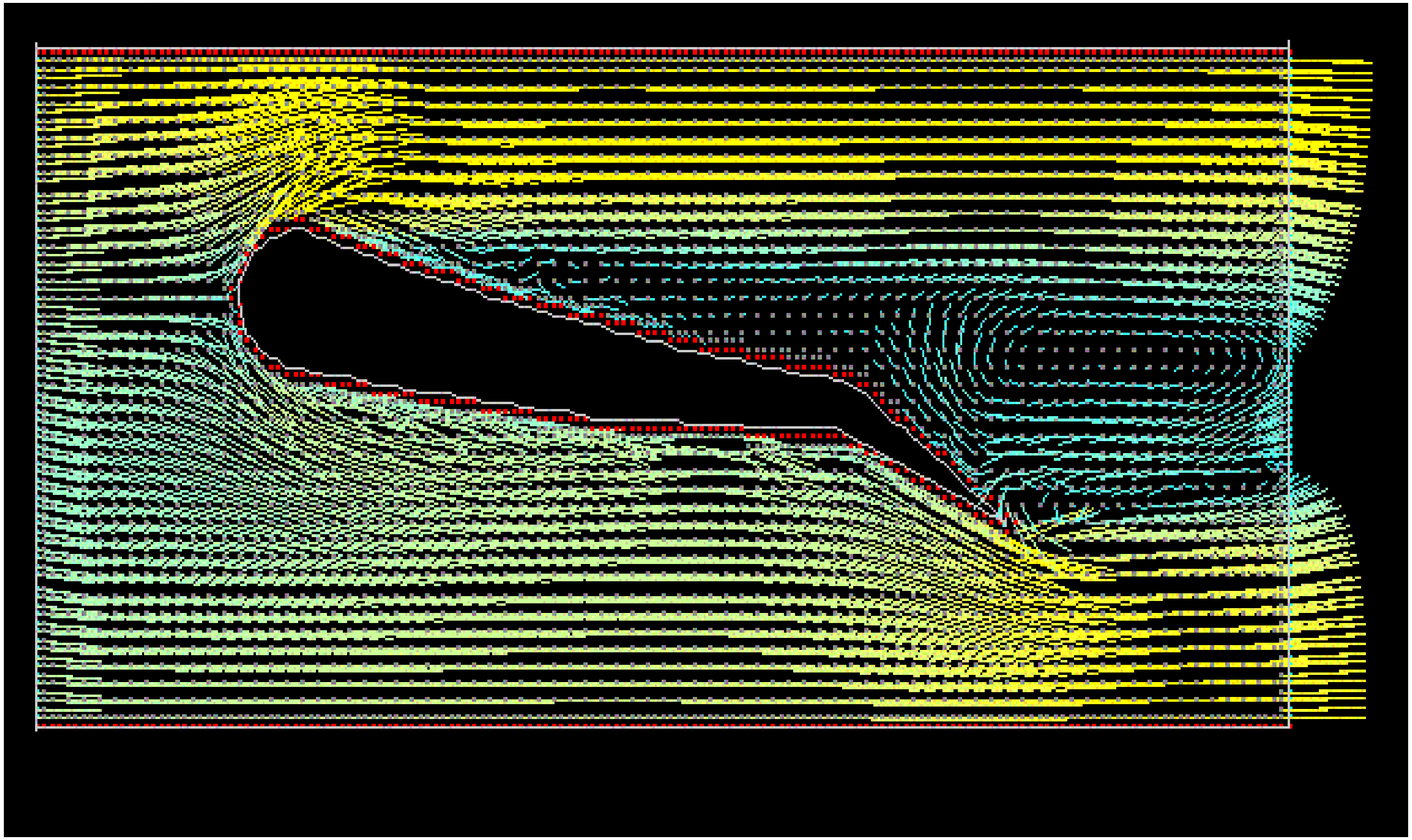
Exemplo – fluxo alrededor de um corpo sólido



A imagem mostra o fluxo em volta dos dois obstáculos



Uma asa - 0,6 Mach



Exemplos: Eletromagnetismo

As Equações de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

onde $\vec{E}$: campo elétrico, $\vec{B}$: campo magnético, *ρ:* densidade de carga, *ε:* permissividade, e μ : permeabilidade do médio.

Outros Sistemas de Coordenadas

Definimos os operadores diferenciais nas coordenadas Euclidianas. Entretanto, as vezes é mais conveniente ao uso de outros sistemas, como o sistema de coordenadas esférico *(r,φ,θ)* para problemas com simetrias esféricas ou coordenadas cilíndricas *(ρ,φ,z)* para problemas com simetrias cilíndricas.

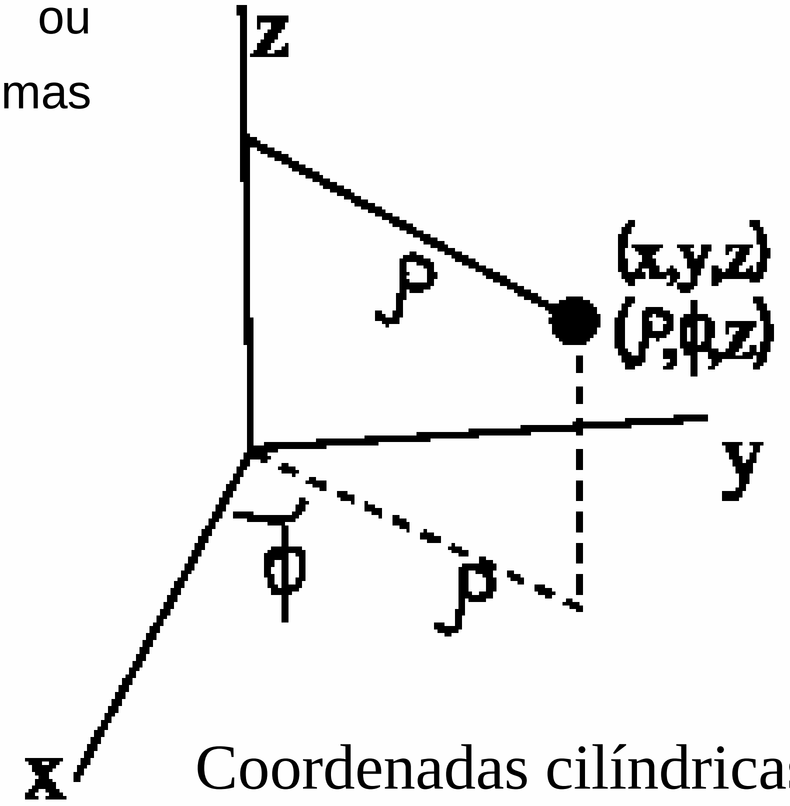
Usando as identidades:

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

...

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

...



Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas obtemos

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

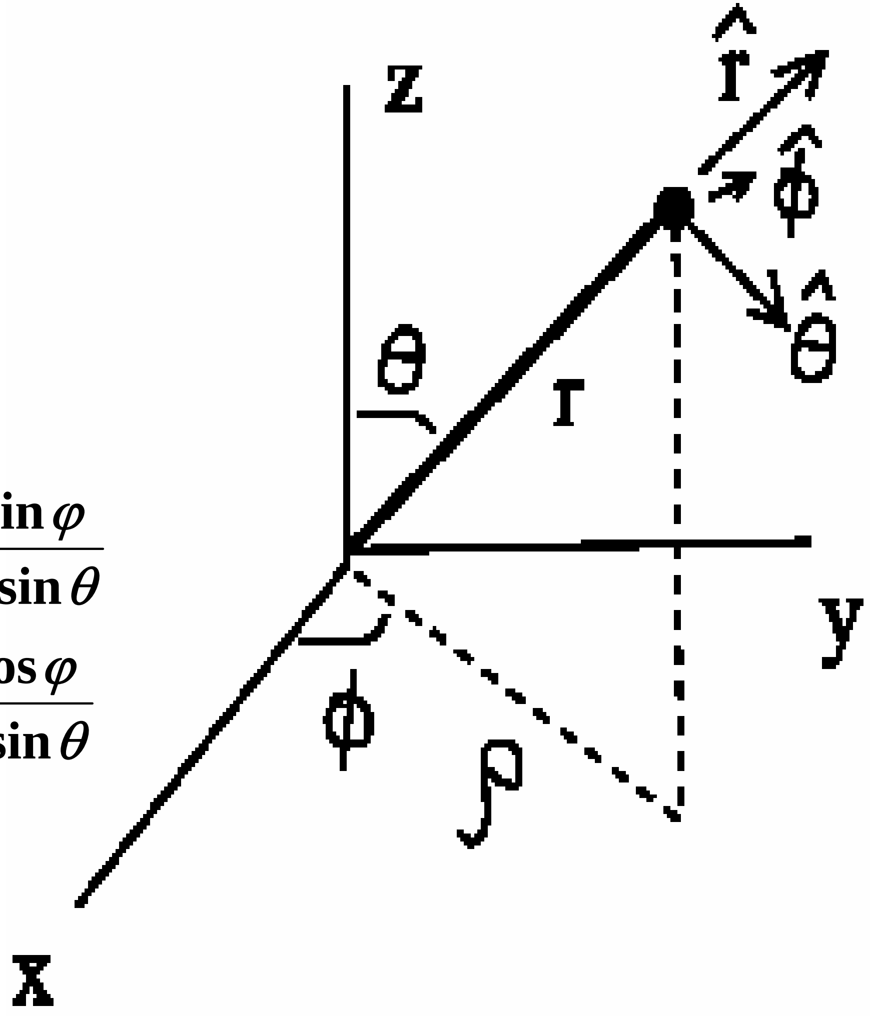
E em esféricasl:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

coordenadas esféricas



O Laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas

cilíndricas

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

esféricas:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$