Secção 1. Introdução às equações diferenciais

(Farlow: Sec. 1.1, 1.2)

Consideremos um exemplo simples de um fenómeno que pode ser descrito por uma equação diferencial. A velocidade de um corpo é definida como o espaço percorrido por unidade de tempo, ou seja, é a razão entre a variação da posição espacial do corpo (Δx) e o intervalo de tempo correspondente (Δt).

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v \tag{1.1}$$

A velocidade pode não ser constante, ou seja, pode variar ao longo do tempo. Logo, por forma a obter uma correcta descrição da velocidade num determinado instante, devemos efectuar medições em intervalos de tempo curtos. Falámos assim de uma velocidade *instantânea* ($\Delta t \to 0$), dada por:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \tag{1.2}$$

Operador diferencial

Obtivemos assim uma *equação diferencial* (porque é uma equação que envolve uma derivada, ou *operador diferencial*), a qual nos diz que a velocidade do é, em cada instante, dada pela primeira derivada de x em ordem a t. Essa derivada, dx/dt, representa a *taxa de variação* do espaço percorrido pelo corpo com o tempo.

Identicamente, sabendo que a aceleração de um corpo, a, é dada pela taxa de variação da velocidade com o tempo, obtemos uma outra equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a(t) \tag{1.3}$$

Constante de integração

Solução geral e solução particular

Voltemos à equação (1.2). Podemos resolver esta equação diferencial simplesmente primitivando ambos os lados da equação em ordem a t[1]:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Leftrightarrow x(t) = \int v(t)dt + C \tag{1.4}$$

Definida a função $v(t)$, podemos calcular a primitiva indicada na equação 1.4, ficando então a ser conhecida a variação de x com t. A constante C, que tivemos que adicionar após a

[1] Este método expedito de resolução de uma equação diferencial é, como veremos adiante, chamado de separação de variáveis. Nem todas as equações diferenciais podem ser resolvidas desta forma.

integração, é designada por *constante de integração.* Esta constante é arbitrária, ou seja, existe uma infinidade de soluções possíveis da equação diferencial (1.2): uma solução por cada valor de C que queiramos arbitrar. Este facto é facilmente visualizável recorrendo à figura 1.1. Para um dado valor de $t = t_1$, todas possuem a mesma primeira derivada (dx/dt), qualquer que seja t_1. Todas estas curvas, assim como qualquer outra obtida por translação em relação ao eixo das ordenadas, são assim solução de uma mesma equação diferencial. No entanto, nós poderemos estar interessados em *apenas uma das soluções possíveis*, por exemplo, na solução que passa pelo ponto (t_0,x_0) – curva indicada a tracejado. Ou seja, à *solução geral*

$$x = \int v(t)dt + C\,,$$

Problema de condição inicial

vamos impor uma *condição inicial*: $t = t_0 \Rightarrow x = x_0$, o que nos permitirá definir o valor da constante C e assim obter uma *solução particular*. Designa-se por *problema de condição inicial* um problema em que é especificada à partida uma condição inicial.

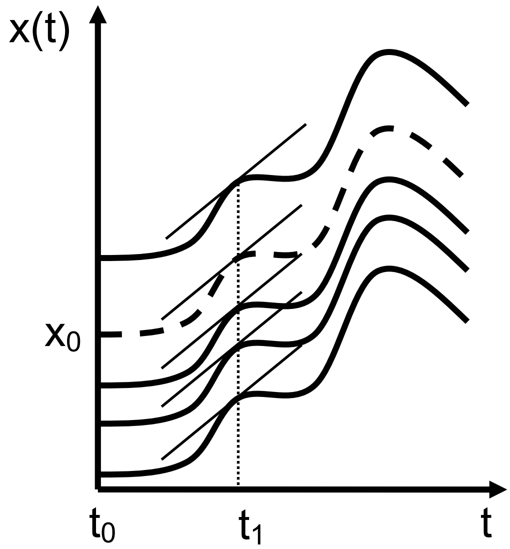

Figura 1.1 - As infinitas soluções possíveis de uma equação diferencial. Destas, apenas uma verifica a condição: $t = t_0 \Rightarrow x = x_0$.

Exemplo

Foi observado que a velocidade de um automóvel varia ao longo do tempo de acordo com a seguinte equação: $v = 100\left(1 - e^{-2t}\right)$, com t em hr e v em km/hr. Sabe-se ainda que ao fim de 1 hr o automóvel tinha percorrido 50 km. Obtenha uma equação que descreva a variação da distância percorrida com o tempo.

Já sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = 100\left(1 - e^{-2t}\right).$$

Integrando ambos os lados em ordem a t obtemos

$$x = 100t + 50e^{-2t} + C\,.$$

Esta é a solução geral da nossa EDO. Se tivermos dúvidas, basta substituir esta expressão na equação diferencial original e verificar se obtemos uma igualdade.

Vamos agora aplicar a condição inicial que nos foi indicada, t = 1 hr $\Rightarrow x$ = 50 km,

$$50 = 100 + 50e^{-2} + C \Leftrightarrow C = -56.77\,.$$

Assim, a solução particular que verifica a condição inicial imposta pelo enunciado do problema é:

$$x = 100t + 50e^{-2t} - 56.77$$

As equações diferenciais dividem-se em dois grandes grupos, Equações Diferenciais Ordinárias e Equações de Derivadas Parciais, os quais são definidos a seguir.

Definição

Equação Diferencial Ordinária

Variáveis dependentes e independentes

Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem n é uma equação que tem a forma geral:

$$F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) = 0$$

em que x é a *variável independente*, *y(x)* é a *variável independente* e n designa a maior das ordens das derivadas presentes na equação.

Exemplo

$$\frac{dz}{dt} - 1 - \sqrt{t} = 0$$ é uma EDO de primeira ordem.

Definição

Equação deDerivadas Parciais

Equação de Derivadas Parciais (EDP) é uma equação que tem a forma geral:

$$F\left(x, z, t, ..., u(x, z, t, ...), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, ...\right) = 0$$

em que *x, z, t,...* são *variáveis independentes* e *u(x, z, t,...)* é a *variável dependente*.

Exemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t = 0$$ é uma EDP.

Nas próximas secções vamos apenas dedicar-nos às equações diferenciais ordinárias, ficando as equações de derivadas parciais para a última secção.

Solução explicita

Solução implícita

Voltando assim às EDOs, designamos por *solução explícita* qualquer função do tipo *y =F(x)* que verifique a equação diferencial. Quando, no entanto, uma solução apenas pode ser escrita na forma *G(x,y) = 0*, então trata-se de uma *solução implícita*.

Exemplo

Consideremos a resolução da seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sqrt{t}$$
$$\int dy = \int \left(1 + \sqrt{t}\right) dt$$
$$y = t + 2t^{3/2} + C$$

A solução geral obtida é obviamente uma solução explicita.

Por outro lado, pode-se demonstrar que a EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

tem como solução: $y = Ce^{y/x}$, ou seja, uma solução implícita[2].

Um conceito extremamente importante tem a ver com a classificação da linearidade das equações diferenciais com que estamos a lidar.

[2] Se bem que ainda não consigamos resolver esta EDO, é possível demonstrar que a solução apresentada verifica realmente a equação diferencial. Tente fazê-lo.

Definição
Linearidade

Uma EDO diz-se *linear* se poder ser escrita na forma:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

com $a_0(x)\neq 0$

- a0(x),…,an(x) são os *coeficientes* da EDO. Se forem constantes (independentes de x), então a EDO diz-se de *coeficientes constantes*.
- Se *f(x)* = 0, então a EDO diz-se *homogénea*.
- Se *f(x)* ≠ 0, então a EDO diz-se *não homogénea*.
- Se a EDO não se poder escrever na forma acima, diz-se *não-linear.*

Exemplo

$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+3xy=0$ é uma EDO linear, de ordem 2, homogénea e de coeficientes variáveis.

$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\mathrm{tg}(y)=0$ é uma EDO não-linear, de ordem 2.

$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin(x)\frac{dy}{dx}+x^2=0$ é uma EDO linear, de ordem 2, não-homogénea e de coeficientes variáveis.

Não devemos esquecer que a linearidade da EDO é definida em relação à variável dependente, ou seja, em relação aos termos em *y* e às suas derivadas. É indiferente se os termos na variável independente, *x*, são ou não lineares.

Exemplo

Resolva a seguinte EDO submetida à condição inicial indicada:

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x)$$
$$x=\pi\Rightarrow y(\pi)=0$$

Trata-se de uma EDO linear, de ordem 1, não homogénea e de coeficientes constantes. A solução geral obtém-se por integração directa:

$$\int dy = \int \cos(x)dx$$
$$y = \sin(x) + C$$

Aplicando agora a condição dada, determinámos a constante de integração:

$$x = \pi \Rightarrow y(\pi) = 0$$
$$0 = \sin(\pi) + C$$
$$C = 0$$

e obtemos a solução particular pretendida:

$$y = \sin(x)$$

Podem ocorrer-nos duas questões neste momento:

- Será que os problemas de condição inicial têm sempre uma solução (ou soluções)? Esta é a chamada questão da *existência* da solução.
- Será que, existindo uma solução para um problema de condição inicial, ela é a única solução possível? Esta é a questão da *unicidade* da solução.

Vejamos alguns exemplos:

A solução particular do problema de valor inicial

$$y' = x$$
$$y(0) = 1$$

pode ser facilmente encontrada:

$$y = \int x dx + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Neste caso a solução existe e é única.

Mas consideremos este outro problema:

$$|y'| + |y| = 0$$
$$y(0) = 1$$

É fácil ver que a única solução possível da EDO é:

$$|y'| = -|y| \Rightarrow y = 0$$

No entanto, $y = 0$ não satisfaz a condição inicial! Assim, não existe solução para este problema.

Por último:

$$y' = (y-1)/x$$
$$y(0) = 1$$

A resolução conduz a:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{1}{x}\,dx + C \Leftrightarrow \ln(y-1) = \ln(x) + C \Leftrightarrow y - 1 = e^{C} x$$
$$y = C'x + 1 \quad \text{em que}\, C' = e^{C}$$

A condição inicial, $y(0) = 1$, é verificada para qualquer valor de C! Assim, existe uma infinidade de soluções da EDO, $y = Cx + 1$, que verificam a condição inicial.

Acabámos de ver que um problema de condição inicial pode ter uma solução única, pode não ter solução ou pode ter uma infinidade de soluções... Será possível saber em que condições é que cada situação ocorre? O teorema de Picard dá-nos alguma informação nesse sentido:

Teorema

Teorema de Picard

Existência e unicidade de solução (Teorema de Picard):

Considerando o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

se as funções f e $\partial f/ \partial y$ forem contínuas numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), então existe uma solução única $y = g(x)$ numa vizinhança de (x_0, y_0).

É importante notar que as condições do teorema são *suficientes,* mas *não necessárias*!

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}$$
$$y(0) = 1$$

Verifiquemos as condições do teorema na vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \equiv (0,1)$:

- $f(x,y)$ não é contínua na vizinhança de (0,1)
- $\partial f / \partial y = 1/x$ não é contínua na vizinhança de (0,1)!

Logo, o teorema de Picard não garante que exista uma solução única... o que não significa que ela não exista de facto: o teorema é simplesmente inconclusivo neste caso.

Sumário da Secção 1

- Equação diferencial ordinária (EDO).
- Equação de derivadas parciais.
- Soluções explícitas e implícitas.
- Linearidade.
- Solução geral e solução particular.
- Existência e unicidade de solução; teorema de Picard.