Secção 5. Equações lineares não homogéneas.

(Farlow: Sec. 3.6 a 3.8)

Vimos na secção anterior como obter a solução geral de uma EDO linear homogénea. Veremos agora como resolver o problema das equações não homogéneas. O seguinte teorema ser-nos-á extremamente útil:

Teorema

Solução geral da equação não homogénea

Se y_p for uma solução particular qualquer da equação não homogénea:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)$$

e y_1 e y_2 forem duas soluções particulares linearmente independentes da equação linear homogénea correspondente

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 0\,,$$

então qualquer solução da equação não homogénea pode ser expressa na forma:

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p\,.$$

Para o caso geral de uma EDO não homogénea de ordem *n* viria:

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n + y_p$$

É bastante simples demonstrar este teorema. Quer y (a solução geral), quer y_p (a solução particular), verificam da EDO não homogénea:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)$$

$$y_p''+p(x)y_p'+q(x)y_p = f(x)\,.$$

Subtraindo uma equação pela outra:

$$(y-y_p)''+p(x)(y-y_p)'+q(x)(y-y_p) = 0\,.$$

Ou seja, $(y - y_p)$ é solução da equação homogénea. Mas vimos na secção anterior que a solução *única* da equação homogénea é: $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Logo:

$$y - y_p = y_h \Rightarrow y = y_h + y_p = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p\,,$$ c.q.d.

Podemos agora delinear a *estratégica de resolução de uma EDO não homogénea*:

1. Encontrar a solução geral da equação homogénea correspondente (y_h):

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

2. Encontrar uma solução particular da equação não homogénea (y_p):

$$y''+p(x)y'+q(x)y= f(x)$$

$$y_p = ...$$

3. Obter a solução geral da equação não homogénea (y):

$$y = y_h + y_p$$

Mas… e como encontramos a solução particular da equação não homogénea, y_p? Vamos ver alguns métodos que podem permitir responder a esta questão.

Método dos coeficientes indeterminados

Este método aplica-se a equações de coeficientes constantes em que o termo f(x) é uma *exponencial*, um *polinómio*, um *seno*, um *coseno* ou um *produto dessas funções*. Vamos ilustrar a sua aplicação com alguns exemplos.

Exemplo 1

f(x) é uma ***exponencial***:

$$y''+y'-2y=3e^{2x}$$

Usando um raciocínio semelhante ao da Secção 4, concluímos que uma função cuja combinação linear com as suas derivadas possa gerar a exponencial é a própria exponencial. Assim, fará sentido dizer que uma solução particular desta EDO não homogénea terá a forma:

$$y_p = Ae^{2x}.$$

O coeficiente A é obtido por substituição de y_p na EDO:

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = \frac{3}{4}.$$

Logo:

$$y_p = \frac{3}{4} e^{2x}.$$

E a solução geral da equação linear não homogénea será (y_h já tinha sido obtido num exemplo da Secção 4):

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \frac{3}{4} e^{2x}.$$

Exemplo 2

f(x) é um ***polinómio***:

$$y'' + 4y = 8x^2$$

Se o resultado da combinação de y_p com as suas derivadas é um polinómio de ordem n, então y_p também deverá ser também um polinómio de ordem n:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Determinamos os coeficientes substituindo y_p na EDO. Primeiro calculamos y_p' e y_p'':

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

Substituindo:

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2$$

$$4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) = 8x^2$$

$$\begin{cases} 4A = 8 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = -1 \end{cases}$$

Ou seja, a solução particular é:

$$y_p = 2x^2 - 1$$

E a solução geral é (y_h já era conhecido):

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 2x^2 - 1$$

Exemplo 3

f(x) é um ***seno*** (ou um ***coseno***):

$$y''-y=2\sin x$$

y_p poderá ser a combinação linear de um seno com um coseno:

$$y_p = A\sin x + B\cos x$$

$$y_p' = A\cos x - B\sin x$$

$$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$$

Substituindo na EDO:

$$-A\sin x - B\cos x - A\sin x - B\cos x = 2\sin x$$

$$-2A\sin x - 2B\cos x = 2\sin x$$

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$

E então:

$$y_p = -\sin x\ .$$

Logo a solução geral será:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \sin x\ .$$

Podem surgir, por vezes, situações em que a resolução se complica ligeiramente. Vejamos um exemplo:

$$y''-y'-2y = 3e^{2x}$$

Tal como anteriormente, propomos que a solução particular terá a forma:

$$y_p = Ae^{2x}$$

Substituindo na EDO:

$$4Ae^{2x} - 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$0 = 3$ Impossível!!!

Chegamos a uma impossibilidade! Porquê? Acontece que $y_p = Ae^{2x}$ *é solução da equação homogénea correspondente*, logo nunca poderia ser também solução da equação não homogénea:

$$y = Ae^{2x} \Rightarrow y'' - y' - 2y = 0\ !$$

Não nos apercebemos deste facto porque fomos procurar a solução particular da equação não homogénea *antes* de procurar a solução geral da equação homogénea. Normalmente, teríamos obtido primeiro a solução geral da equação homogénea correspondente e detectado imediatamente o problema.

Mas então, o que fazer nestas circunstâncias? Teremos que adoptar como solução particular:

$$y_p = x^s A e^{ax},$$

em que s é o menor inteiro que faz com que y_p não ocorra também na solução da equação homogénea correspondente.

Para os restantes casos que vimos anteriormente, correspondentes às outras formas possíveis de *f(x)*, deveremos usar:

$$y_p = x^s(Ax^n + Bx^{n-1} + ...)$$

$$y_p = x^s(A\sin x + B\cos x)$$

Vamos ver mais um exemplo, em que iremos seguir o procedimento completo até chegar à solução geral:

Exemplo

Encontrar a solução geral de:

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

1. $y_h = ?$

   A equação homogénea correspondente é:

$$y''-2y'+y=0.$$

A equação característica é então:

$$r^2-2r+1=0 \Rightarrow r=1 \text{ (raiz dupla)}$$

Logo:

$$y_h = C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$$

$$y_h = C_1e^{x}+C_2xe^{x}.$$

2. $y_p = ?$

e^x e xe^x são soluções da equação homogénea. Logo, y_p terá que ser:

$$y_p = x^2Ae^x$$

$$y_p' = 2xAe^x + x^2Ae^x$$

$$y_p'' = 2Ae^x + 2xAe^x + 2xAe^x + x^2Ae^x = 2Ae^x + 4xAe^x + x^2Ae^x$$

Substituindo na EDO obtemos:

$$A(2+4x+x^2-4x-2x^2+x^2)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

E a solução geral será:

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x.$$

Vamos considerar outro exemplo, um pouco mais geral:

Exemplo

$$y''-6y'+9y=f(x)$$

Primeiro resolvemos a equação homogénea correspondente:

$$m^2-6m+9=0 \Rightarrow r=3 \text{ (raiz dupla)}$$

Logo:

$$y_h = C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$$

A forma de y_p dependerá da forma de $f(x)$. Por exemplo:

Preste particular atenção aos exemplos d. *e* e.

a. $f(x) = 2 + x \Rightarrow y_p = A + Bx$

b. $f(x) = e^{2x} \Rightarrow y_p = Ae^{2x}$

c. $f(x) = \cos 2x \Rightarrow y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

d. $f(x) = e^{2x}\cos 2x \Rightarrow y_p = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

e. $f(x) = (2+x)e^{2x}\cos 2x \Rightarrow y_p = (A+Bx)e^{2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$

E se fosse:

$$f(x) = (2+x)e^{3x} \ ?$$

Iríamos propor:

$$y_p = (A+Bx)e^{3x}, \text{ certo?}$$

ERRADO! Repare que se y_p tiver esta forma, ficaria então:

$$y_p = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

Mas quer e^{3x}, quer xe^{3x}, são soluções da equação homogénea! Iríamos cair novamente numa impossibilidade! Vamos usar a técnica anterior e multiplicar a solução proposta por x:

$$y_p = x(A+Bx)e^{3x} = Axe^{3x} + Bx^2e^{3x}$$

não basta, pois volta a haver uma repetição: xe^{3x} aparece na solução da equação homogénea. Voltando a multiplicar por x:

$$y_p = x^2(A+Bx)e^{3x}$$

Agora não há de facto sobreposição. Esta é a solução particular a adoptar.

O método dos coeficientes indeterminados apresenta a óbvia limitação de ser apenas aplicável a equações de coeficientes constantes. Veremos a seguir uma outra técnica, mais genérica.

Método da variação de parâmetros

Este método aplica-se a *quaisquer EDOs lineares,* de coeficientes constantes ou não. Recordemos a forma geral da equação linear não homogénea de segunda ordem:

$$y''+p(x)y'+q(x)y= f(x).$$

A solução geral da equação homogénea correspondente é:

$$y_h(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

O método da variação de parâmetros diz-nos que uma solução particular da equação não homogénea pode ser obtida a partir de y_h, substituindo as constantes por funções desconhecidas de x:

Forma da solução particular - método da var. de parâmetros

$$y_p(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$$

v_1 e v_2 são os tais “parâmetros” que teremos que determinar. Como? Adivinharam! Substituímos y_p na equação diferencial não homogénea e tentámos daí obter uma relação (ou relações) que nos permita obter v_1 e v_2.

Primeiro, vamos calcular as derivadas de y_p:

$$y_p'=v_1'y_1+v_1y_1'+v_2'y_2+v_2y_2'$$

Como temos *duas* incógnitas e sabemos de antemão que a substituição na EDO só nos irá proporcionar uma equação, teremos que arranjar uma equação adicional. Parece lícito então procurar uma relação que nos facilite o tratamento matemático. Realmente, se na expressão da primeira derivada obrigarmos a que:

$$v_1'y_1+v_2'y_2=0,$$

esta ficará simplesmente:

$$y_p'=v_1y_1'+v_2y_2'.$$

E a segunda derivada virá:

$$y_p''=v_1'y_1'+v_1y_1''+v_2'y_2'+v_2y_2''.$$

Substituindo na EDO:

$$\begin{aligned}&(v_1'y_1'+v_1y_1''+v_2'y_2'+v_2y_2'')+p(x)(v_1y_1'+v_2y_2')+\\&+q(x)(v_1y_1+v_2y_2)=f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v_1\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)+v_2\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right)+\\&+v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(x)\end{aligned}$$

As expressões entre parentes na equação anterior são nulas, uma vez que y_1 e y_2 são soluções particulares da equação homogénea. Ficámos assim com:

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x).$$

Obtivemos assim duas relações que nos permitem obter v_1 e v_2:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f \end{cases}$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema recorrendo à regra de Cramer obtemos:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 f}{W} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_1 f}{W}$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx \qquad v_2 = -\int \frac{y_1 f}{W} dx$$

Exemplo

Encontrar a solução geral da EDO:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

Começamos por resolver a equação homogénea. A equação característica é:

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i.$$

O que conduz a:

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Agora procuramos uma solução particular da equação não homogénea. É de notar que o método dos coeficientes indeterminados não se aplica a esta EDO (porquê?). Vamos então aplicar o método da variação de parâmetros:

$$y_p = v_1 \sin x + v_2 \cos x$$

Os parâmetros são determinados a partir do sistema:

$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sin x \end{bmatrix}$$

$$W = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$v_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 1/\sin x & -\sin x \end{vmatrix}}{W} dx = \int \frac{-\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-1} dx = \ln|\sin x|$$

$$v_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 1/\sin x \end{vmatrix}}{W} dx = \int \frac{1}{-1} dx = -x$$

E então:

$$y_p = (\ln|\sin x|)\sin x - x\cos x\,.$$

A solução geral da EDO fica assim:

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x + (\ln|\sin x|)\sin x - x\cos x\,.$$

Em resumo:

Resolver a eq. linear não homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Obter a sol. geral da eq. homogénea correspondente, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, a partir da combinação linear de duas sol. particulares linearmente independentes:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

(se apenas conseguirmos obter uma sol. particular, a segunda pode ser obtida pelo Método d'Alembert)

Obter uma sol. particular da eq. não homogénea (pelo método dos coeficientes indeterminados ou pelo método da variação de parâmetros):

$$y_p = \ldots$$

Obter a solução geral da eq. não homogénea:

$$y = y_h + y_p$$

Sumário da Secção 5

- Solução geral da equação não homogénea
- Método dos coeficientes indeterminados
- Método da variação de parâmetros