

## Secção 8. Equações diferenciais não lineares.

(Farlow: Sec. 8.1 a 8.3)

Esta secção será dedicada às EDOs não lineares, as quais são geralmente de resolução analítica difícil ou mesmo impossível. Não vamos portanto tentar resolvê-las como fizemos com as equações lineares nas secções anteriores, mas apenas procurar obter informação qualitativa sobre o comportamento da solução na proximidade do chamado ponto (ou pontos) de equilíbrio. Para tal, teremos primeiro que estudar como as soluções de sistemas de EDOs *lineares* se comportam na proximidade do ponto de equilíbrio. Veremos depois como esta informação nos será útil.

Vamos começar por considerar um caso simples: apenas uma EDO linear de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dt} = -y - 2.$$

Esta equação é designada de *autónoma*, pois o lado direito não é função explícita da variável independente  $t$ , mas apenas de  $y$ . Chamamos *ponto de equilíbrio* da equação ao ponto  $y$  para o qual a primeira deriva de  $y$  em ordem a  $t$  se anula, ou seja, no ponto de equilíbrio,  $y$  não varia com  $t$ . Neste caso:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow -y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2.$$

Assim, o ponto de equilíbrio corresponde a  $y = -2$ . Mas o que é que isto significa realmente? Como é que o ponto de equilíbrio afecta o comportamento da solução da EDO? Vamos resolver a equação diferencial para tentar responder a esta questão.

$$\frac{dy}{y+2} = -dt \Leftrightarrow \ln|y+2| = -t + C \Leftrightarrow y = Ce^{-t} - 2.$$

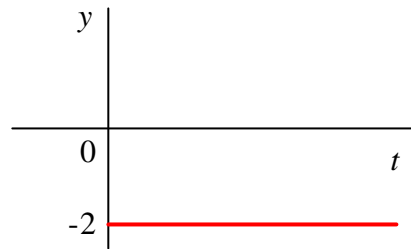
Consideremos a condição inicial  $y(0) = -2$ , ou seja, para  $t = 0$ ,  $y$  encontra-se precisamente no ponto de equilíbrio:

$$y(0) = -2 \Rightarrow -2 = Ce^0 - 2 \Rightarrow C = 0.$$

Ou seja, a solução particular correspondente a esta condição inicial é:

$$y = -2.$$

Em termos gráficos teríamos:

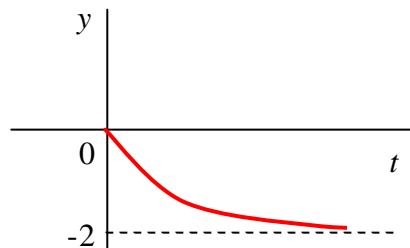


Ou seja,  $y$  é constante ao longo do tempo! Se a solução partir do ponto de equilíbrio, ela permanece nesse ponto. Isto faz sentido, sem dúvida. Mas, e se partirmos de outro ponto, que não o de equilíbrio? Vamos então considerar outra condição inicial:  $y(0) = 0$ .

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = Ce^0 - 2 \Rightarrow C = 2$$

$$y = 2e^{-t} - 2.$$

Graficamente:



A solução aproxima-se *assintoticamente* do ponto de equilíbrio ao longo do tempo. Realmente, da solução particular obtida vemos que:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -2.$$

Mas será que este comportamento é geral, ou seja, será que as soluções particulares de qualquer equação se aproximam sempre do ponto de equilíbrio? Vejamos outra equação diferencial, ligeiramente diferente da anterior:

$$\frac{dy}{dt} = y + 2.$$

O ponto de equilíbrio é novamente  $y = -2$ . A solução geral da EDO é:

$$y = Ce^t - 2.$$

Consideremos novamente a condição inicial  $y(0) = -2$ :

$$y(0) = -2 \Rightarrow -2 = Ce^0 - 2 \Rightarrow C = 0.$$

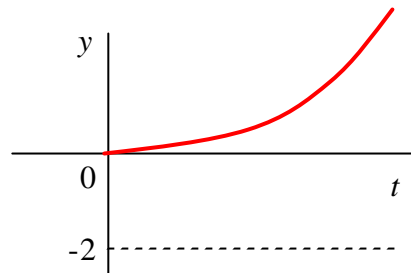
$$y = -2.$$

Mais uma vez, se  $y$  se encontrar no ponto de equilíbrio no início, manter-se-á nesse ponto ao longo do tempo. E se  $y(0) = 0$ ?

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = Ce^0 - 2 \Rightarrow C = 2$$

$$y = 2e^t - 2.$$

A representação gráfica daria:



O comportamento é agora bastante diferente do anterior:  $y$  afasta-se cada vez mais do ponto de equilíbrio! De facto, da solução obtida tem-se que:

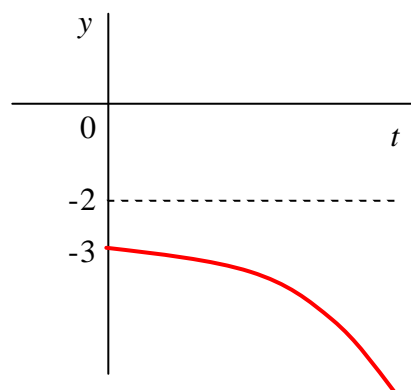
$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty.$$

Tentemos outra condição inicial:  $y(0) = -3$ :

$$y(0) = -3 \Rightarrow -3 = Ce^0 - 2 \Rightarrow C = -1$$

$$y = -e^t - 2.$$

A nova representação gráfica terá este aspecto:



Mais uma vez, a solução afasta-se do ponto de equilíbrio:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty.$$

Então, nem sempre a solução de uma EDO tende para o ponto de equilíbrio à medida que o tempo decorre... Vamos sistematizar esta análise do significado e implicações do conceito de ponto de equilíbrio, generalizando-a para sistemas de equações diferenciais

lineares de primeira ordem. Consideraremos o caso simples em que o sistema tem apenas duas equações.

### **Classificação de pontos de equilíbrio de sistemas lineares no plano de fases**

Consideremos um sistema linear homogéneo, de coeficientes constantes, de duas equações diferenciais na forma matricial:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x}.$$

Ponto de equilíbrio

O ponto de equilíbrio do sistema é o ponto  $(x_{1e}, x_{2e})$  para o qual as derivadas se anulam, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0\end{aligned}$$

É fácil de ver que para qualquer sistema linear homogéneo o ponto de equilíbrio é dado por  $(x_{1e}, x_{2e}) = (0,0)$ .

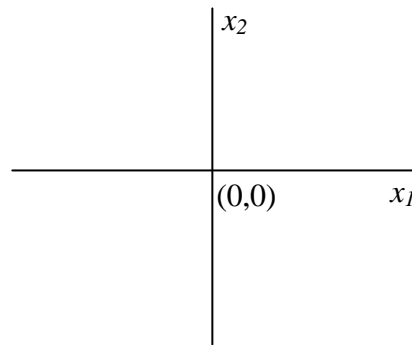
O nosso objectivo é estudar como as soluções particulares do sistema se comportam na vizinhança do ponto de equilíbrio  $(0,0)$ . Será que as soluções, ao longo do tempo, convergem para o ponto de equilíbrio ou será que se afastam dele? E qual o seu aspecto gráfico?

Vimos na Secção 7 que a solução geral de um sistema homogéneo de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\underline{x} = c_1 e^{I_1 t} \underline{v}^{(1)} + c_2 e^{I_2 t} \underline{v}^{(2)},$$

em que  $I_1$  e  $I_2$  são os valores próprios da matriz de coeficientes e  $\underline{v}^{(1)}$  e  $\underline{v}^{(2)}$  são os vectores próprios associados a cada valor próprio. É com base nesta expressão que vamos estudar o comportamento da solução,  $\underline{x}$ , na proximidade do ponto de equilíbrio  $(0,0)$ . Esse estudo será efectuado de forma qualitativa recorrendo a uma representação gráfica denominada *plano de fases*: não representamos  $x_1$  e  $x_2$  independentemente em função do tempo, mas sim  $x_2$  em função de  $x_1$ :

Plano de fases e trajectórias



O ponto de equilíbrio  $(0,0)$  corresponde à origem das coordenadas do plano de fases. O percurso traçado por  $x_1$  e  $x_2$  ao longo do tempo no plano de fases é denominado *trajectória*.

Vamos então considerar vários casos, correspondentes aos diferentes tipos de valores próprios que podem ocorrer:

### I. Valores próprios reais, distintos e de sinal igual

#### a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

A solução geral é dada por:

$$\underline{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}^{(2)}$$

Vejamos primeiro o que sucede na situação limite em que  $t \rightarrow +\infty$ : uma vez que ambas as exponenciais têm expoentes negativos, ambas as parcelas tenderão para zero, ou seja:  $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$ . Assim, ficamos já a saber que todas as soluções se aproximam do ponto de equilíbrio à medida que o tempo aumenta. Mas como se efectua, no plano de fases, essa aproximação? Para tempo elevados, a parcela de  $\underline{x}$  que tende “mais rapidamente” para zero será  $c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}^{(1)}$ , uma vez que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Ou seja, para tempos suficientemente elevados, a parcela em  $\underline{v}^{(1)}$  poderá ser desprezada e apenas a parcela em  $\underline{v}^{(2)}$  contribuirá para  $\underline{x}$ :

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}^{(2)}.$$

Vemos então que as soluções, no plano de fases, se deverão aproximar do ponto  $(0,0)$  seguindo (assimptoticamente) a direcção do vector  $\underline{v}^{(2)}$ !

No caso adicional em que as condições iniciais do problema implicarem que  $c_1 = 0$ ,  $\underline{x}$  terá *sempre* a direcção de  $\underline{v}^{(2)}$ :

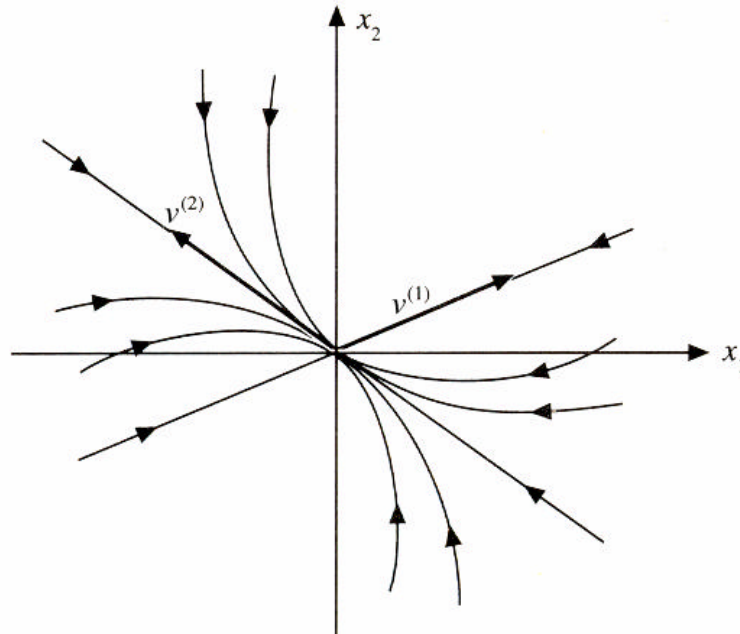
$$c_1 = 0 \Rightarrow \underline{x} = c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}^{(2)}.$$

Apenas uma solução particular não obedece a este comportamento assintótico: aquela para a qual  $c_2 = 0$ . Nesse caso:

$$c_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = c_1 e^{l_1 t} \underline{v}^{(1)},$$

ou seja, e a solução aproxima-se de (0,0) ao longo da direcção do vector  $\underline{v}^{(1)}$ .

As trajectórias estão esquematizadas no plano de fases abaixo<sup>†</sup>, assumindo dois vectores próprios arbitrários,  $\underline{v}^{(1)}$  e  $\underline{v}^{(2)}$ :



Nó  
impróprio

Cada uma das trajectórias representadas corresponde a uma solução particular do sistema (ou seja, provêm de uma condição inicial distinta). As setas colocadas sobre cada trajectória indicam o sentido da sua evolução à medida que  $t$  aumenta.

Vemos que todas as trajectórias (excepto duas, para o caso em que  $c_2 = 0$ ) seguem uma mesma direcção assintótica na vizinhança do ponto de equilíbrio. Nesta situação, o ponto de equilíbrio é então designado de *nó impróprio*.

**b)  $0 < l_2 < l_1$**

Agora sucede o oposto do caso anterior: quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\underline{x} \rightarrow \infty$ <sup>‡</sup>, ou seja, para tempos elevados, as trajectórias afastam-se cada vez mais do ponto de equilíbrio. As trajectórias encontram-se na vizinhança do ponto de equilíbrio apenas quando  $t \rightarrow -\infty$ . É fácil concluir que o traçado das trajectórias no plano de fases é idêntico ao anterior, apenas

<sup>†</sup> Os exemplos de planos de fases aqui apresentados são adaptados do capítulo 8 do *Farlow*.

<sup>‡</sup> Ao dizermos que  $\underline{x} \rightarrow \infty$  pretendemos indicar que  $x_1$  e  $x_2$  tendem para  $+\infty$  ou  $-\infty$ , de forma que as trajectórias se afastam do ponto de equilíbrio, percorrendo um determinado quadrante no plano de fases.

com a diferença de que o seu sentido é invertido (as setas apontam “para fora”, enquanto que anteriormente apontavam para o centro). Todas as trajectórias se afastam do ponto de equilíbrio à medida que o tempo avança.

## II. Valores próprios reais, distintos e de sinal diferente

$$l_2 < 0 < l_1$$

$$\underline{x} = c_1 e^{l_1 t} \underline{v}^{(1)} + c_2 e^{l_2 t} \underline{v}^{(2)}$$

Qual é agora o comportamento das trajectórias? Vejamos as situações limite, ou seja, quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ :

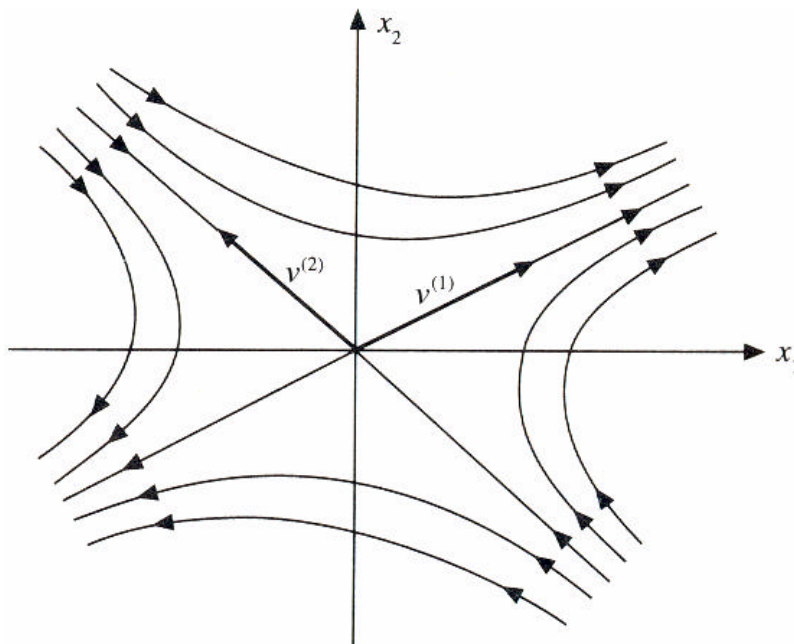
$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow c_1 e^{l_1 t} \underline{v}^{(1)} \rightarrow \infty$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow c_2 e^{l_2 t} \underline{v}^{(2)} \rightarrow \infty$$

Ou seja, quando  $t \rightarrow +\infty$  as trajectórias afastam-se do centro do plano de fases seguindo a direcção de  $\underline{v}^{(1)}$  (o vector próprio associado ao valor próprio positivo). Quando  $t \rightarrow -\infty$  as trajectórias afastam-se do centro do plano de fases seguindo a direcção de  $\underline{v}^{(2)}$  (o vector próprio associado ao valor próprio negativo)

Parece que em nenhuma circunstância as trajectórias se aproximam do ponto de equilíbrio (0,0)... Não é bem assim: se  $c_1 = 0$ ,  $\underline{x} = c_2 e^{l_2 t} \underline{v}^{(2)}$  e logo  $\underline{x} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Da forma semelhante, se  $c_2 = 0$ ,  $\underline{x} = c_1 e^{l_1 t} \underline{v}^{(1)}$  e então  $\underline{x} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

O seguinte plano de fases esquematiza as conclusões obtidas:



Ponto de  
sela

O ponto de equilíbrio é agora designado de *ponto de sela*<sup>§</sup>.

### III. Valores próprios iguais

#### a) Existem dois vectores próprios linearmente independentes

Se conseguirmos encontrar dois vectores próprios linearmente independentes associados ao valor próprio único,  $\mathbf{I}$ , então a solução geral é dada por:

$$\underline{x} = c_1 e^{I t} \underline{v}^{(1)} + c_2 e^{I t} \underline{v}^{(2)} = e^{I t} (c_1 \underline{v}^{(1)} + c_2 \underline{v}^{(2)}).$$

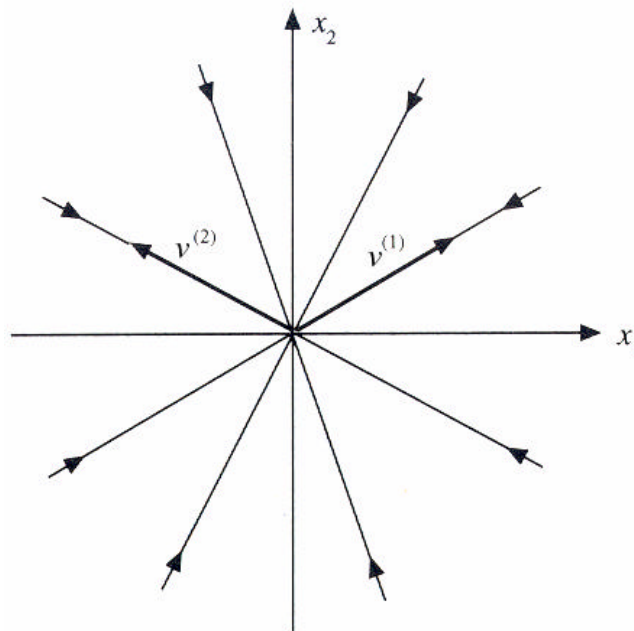
$(c_1 \underline{v}^{(1)} + c_2 \underline{v}^{(2)})$  é um vector cuja direcção depende das constantes  $c_1$  e  $c_2$  (ou seja, das condições iniciais do problema). As trajectórias vão assim, ao longo do tempo, seguir a direcção desse vector, ou seja, serão *rectas* com a direcção de  $(c_1 \underline{v}^{(1)} + c_2 \underline{v}^{(2)})$ . O sentido das trajectórias dependerá do sinal de  $\mathbf{I}$ .

Se  $I < 0$ :

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow \underline{0}$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow \infty$$

ou seja, as trajectórias aproximam-se do ponto de equilíbrio à medida que  $t$  aumenta. Eis o plano de fases correspondente:



Nó  
próprio

<sup>§</sup> Esta designação é usada pois, em planos de fases tridimensionais, as trajectórias lembram a curvatura da sela de um cavalo.



Uma vez que cada trajectória segue uma direcção distinta na vizinhança do ponto de equilíbrio, este é designado de *nó próprio*.

Se  $I > 0$ , o plano de fases teria o mesmo aspecto, excepto que as trajectórias evoluíam no sentido oposto (apontam para fora).

**b) Não existem dois vectores próprios linearmente independentes**

Neste caso teremos de recorrer a um *vector próprio generalizado* por forma a construir a solução geral:

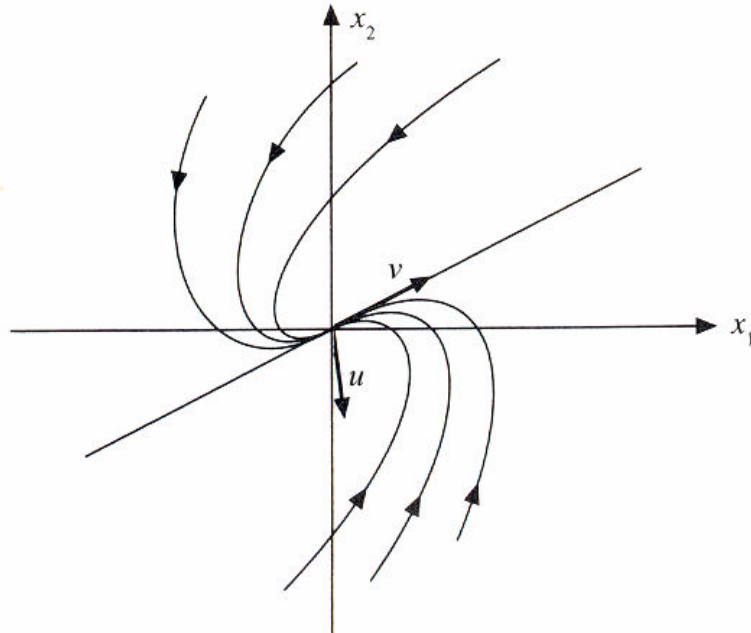
$$\underline{x} = c_1 e^{I t} \underline{v} + c_2 e^{I t} (\underline{u} + t \underline{v}) = e^{I t} (c_1 \underline{v} + c_2 \underline{u} + c_2 t \underline{v}).$$

Assumindo  $I < 0$ , teremos nas situações limite:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow e^{I t} c_2 t \underline{v} \rightarrow \underline{0}$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow \infty$$

Para tempos elevados, as trajectórias aproximam-se do ponto de equilíbrio seguindo a direcção do vector  $\underline{v}$ . Para  $t \rightarrow -\infty$ , as trajectórias afastam-se do ponto de equilíbrio. Eis o esquema do plano de fases correspondente:



Nó  
impróprio

O ponto de equilíbrio é um *nó impróprio*, tal como secedia num caso anterior em que as trajectórias assumiam uma mesma direcção assintótica na sua vizinhança.

Se  $I > 0$ , o sentido das trajectórias seria o inverso.

#### IV. Valores próprios complexos conjugados

Neste caso,  $I = a \pm ib$ ,  $\underline{v} = \underline{a} \pm i\underline{b}$ , e a solução geral será dada por:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= c_1 e^{at} [\cos(bt)\underline{a} - \sin(bt)\underline{b}] + c_2 e^{at} [\sin(bt)\underline{a} + \cos(bt)\underline{b}] = \\ &= e^{at} \{ [c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)]\underline{a} + [-c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)]\underline{b} \}\end{aligned}$$

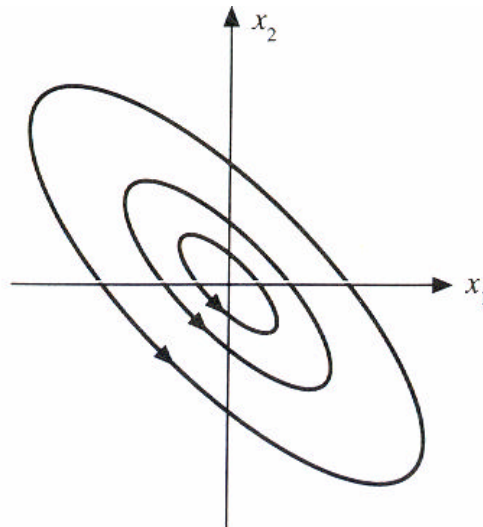
Temos agora que considerar dois casos distintos:

##### a) Os valores próprios têm parte real nula, $a = 0$

A solução é então simplesmente:

$$\underline{x} = [c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)]\underline{a} + [-c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)]\underline{b},$$

Uma vez que os vectores  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são multiplicados por coeficientes que assumem valores periódicos no tempo,  $\underline{x}$  não exhibe qualquer comportamento específico quando  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Poderá haver momentos em que a solução se afasta de  $(0,0)$ , para depois se voltar a aproximar, sendo este comportamento repetido infinitamente. O plano de fases terá assim um aspecto semelhante ao representado abaixo:



Centro

O ponto de equilíbrio é agora designado de *centro*, uma vez que as trajectórias “orbitam” continuamente em seu redor.

##### b) Os valores próprios têm parte real não nula, $a \neq 0$

A solução geral é dada por:

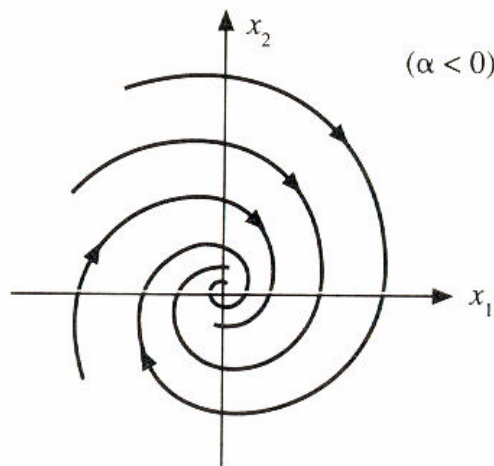
$$\underline{x} = e^{at} \{ [c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)] \underline{a} + [-c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)] \underline{b} \}.$$

Se  $a < 0$ , é fácil de ver que:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow \underline{0}$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow \infty$$

As trajectórias “orbitam” ainda em torno de  $(0,0)$ , no entanto, aproximam-se cada vez mais à medida que o tempo aumenta, formando uma espiral. Eis o plano de fases correspondente:



Foco

O ponto de equilíbrio é denominado *foco*.

Se  $a > 0$ , o sentido das trajectórias seria o oposto.

### **Classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio**

Um ponto de equilíbrio é *estável* se, para qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajectória da solução correspondente permanecer *próxima* desse ponto.

Para além disso, um ponto de equilíbrio é *assimptoticamente estável* se for estável e a trajectória se aproximar do ponto quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Um ponto de equilíbrio que não seja estável é chamado *instável*.

Um centro é um exemplo de um ponto de equilíbrio estável, mas não assimptoticamente estável. Um foco ou um nó próprio ou nó impróprio em que as trajectórias tendam para o ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow +\infty$ , são exemplos de pontos de equilíbrio assimptoticamente estáveis.

Pontos de equilíbrio estáveis, assimptoticamente estáveis e instáveis

Vamos ver um exemplo de classificação da estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear.

---

### Exemplo

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

A matriz de coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios e vectores próprios associados são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -1, \underline{v}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -4, \underline{v}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução geral do sistema é assim:

$$\underline{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

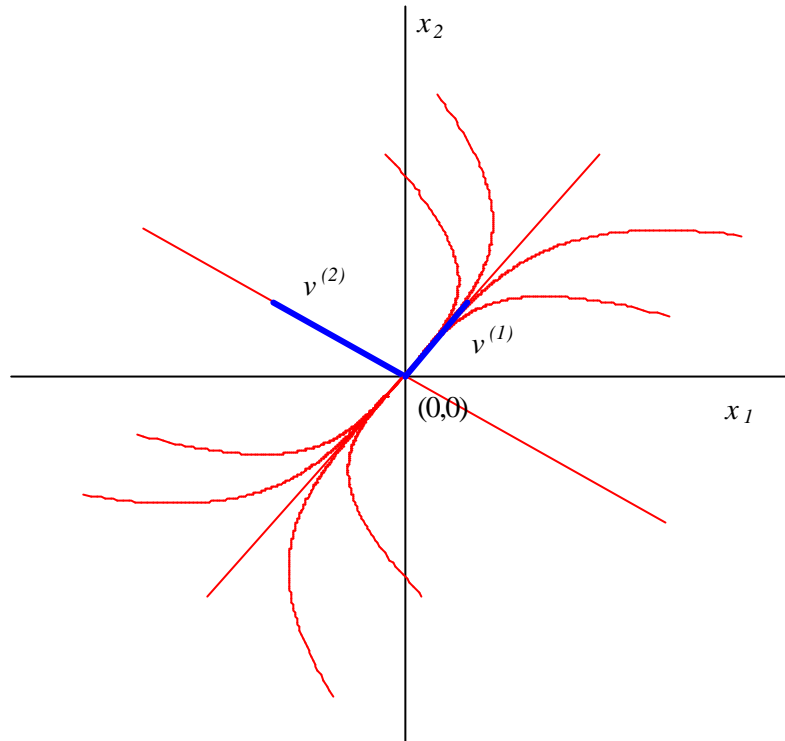
Temos uma situação em que os valores próprios são reais, distinto e do mesmo sinal (negativo). De acordo com a análise que efectuamos anteriormente, as trajectórias aproximam-se do ponto de equilíbrio seguindo a direcção assintótica definida pelo vector próprio  $\underline{v}^{(1)}$ :

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{x} \rightarrow c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{0}.$$

Nas situações particulares (ditadas pelas condições iniciais do problema) em que  $c_1 = 0$  ou  $c_2 = 0$ , as trajectórias são rectilíneas:

$$\begin{aligned} c_1 = 0 &\Rightarrow \underline{x} = c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c_2 = 0 &\Rightarrow \underline{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O ponto de equilíbrio do sistema é assim um *nó impróprio estável*. Temos a seguir uma representação *rigorosa* \*\* de algumas das trajectórias. O seu sentido (não indicado nesta figura) aponta para o centro do plano de fases.




---

Eis outro exemplo.

---

### Exemplo

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -4x_1 + 5x_2 \\ x'_2 = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

A matriz de coeficientes do sistema é:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios são agora complexos conjugados:

---

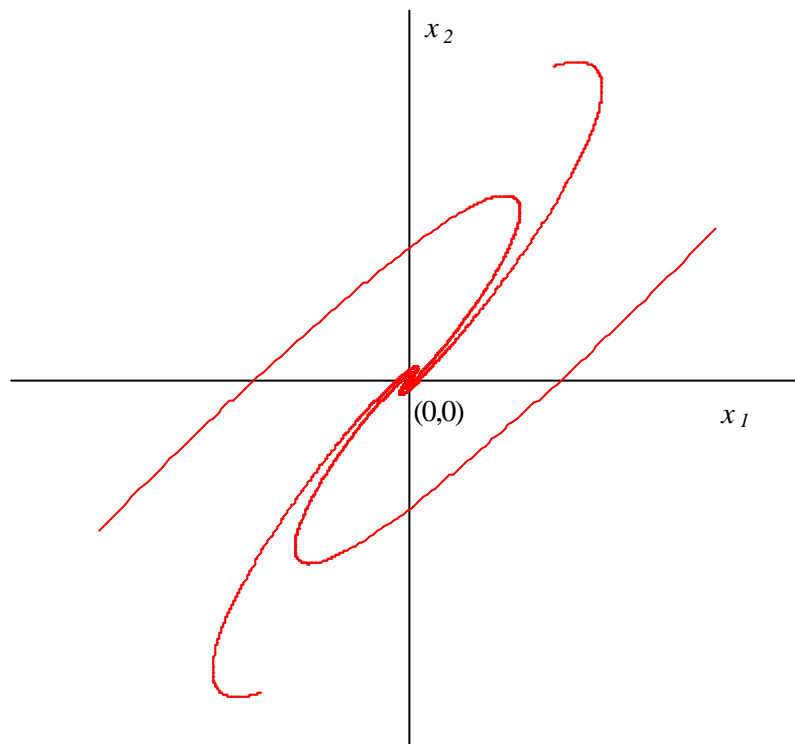
\*\* Efectuada recorrendo ao MS Excel.

$$\mathbf{I} = -1 \pm i, \underline{v} = \begin{bmatrix} 3-i \\ 2 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é:

$$\underline{x} = e^{-t} \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \cos t + \sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \sin t - \cos t \\ 2 \sin t \end{bmatrix} \right\}.$$

Temos assim um *foco estável*. Eis a representação rigorosa de algumas das trajectórias no plano de fases:




---

Terminado este estudo introdutório relativo ao comportamento das trajectórias de sistemas lineares de primeira ordem, vamos então iniciar a análise das equações diferenciais *não lineares*.

### Equações diferenciais não lineares

Consideremos o seguinte sistema de *duas EDOs não lineares de primeira ordem*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

Sistema  
autónomo

Um sistema deste tipo, em que as funções  $P$  e  $Q$  não dependem explicitamente da variável independente  $t$ , é chamado um *sistema autónomo*.

Um *ponto de equilíbrio* do sistema é um ponto  $(x_e, y_e)$  para o qual  $x'$  e  $y'$  se anulam:

$$\begin{cases} P(x_e, y_e) = 0 \\ Q(x_e, y_e) = 0 \end{cases}$$

Pontos que não são pontos de equilíbrio são chamados *pontos regulares*.

O sistema acima pode não ser resolúvel analiticamente. Poderemos, no entanto, tentar analisar não o comportamento de  $x$  e  $y$  em função de  $t$ , mas simplesmente o comportamento de  $y$  em função de  $x$ , ou seja, as *trajectórias* que os pontos  $(x, y)$  descrevem ao longo do tempo no plano de fases  $xy$ . Como podemos obter essas trajectórias? Vamos considerar dois casos possíveis:

#### 1) Cálculo das trajectórias de um sistema autónomo

Consideremos o sistema autónomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Se conseguirmos resolver esta equação diferencial, obtemos  $y$  em função de  $x$ , ou seja, a equação geral das trajectórias no plano de fases.

---

#### Exemplo

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2 \end{cases}$$

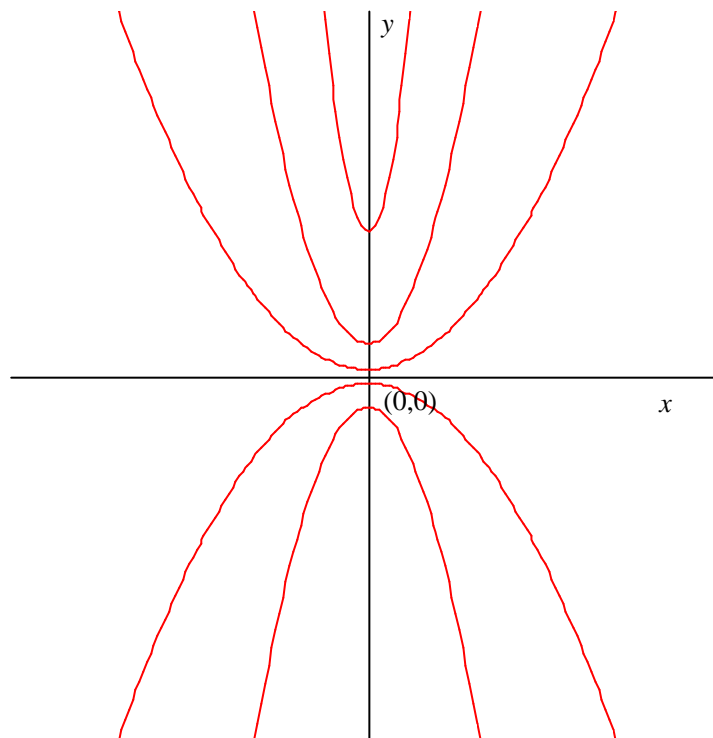
As trajectórias podem ser obtidas resolvendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{y(x^2 + 1)} = \frac{2xy}{x^2 + 1}.$$

De onde se obtém:

$$y = C(x^2 + 1).$$

Uma representação rigorosa de algumas destas trajectórias é apresentada na figura seguinte.



## 2) Cálculo das trajectórias de uma EDO autónoma de segunda ordem

A seguinte equação não linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$



é designada como *autónoma* pois  $P$  não é função de  $t$ . Ela pode ser *transformada num sistema autónomo* fazendo  $y = \frac{dx}{dt}$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = P(x, y) \end{cases}$$

E, tal como anteriormente, as trajectórias  $(x,y)$  poderão ser obtidas se conseguirmos resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{y}.$$

Estas trajectórias dar-nos-ão assim informação sobre a forma como  $y$  (ou seja,  $x'$ ) varia com  $x$ .

### Exemplo

Consideremos a EDO não linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Fazendo  $y = \frac{dx}{dt}$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

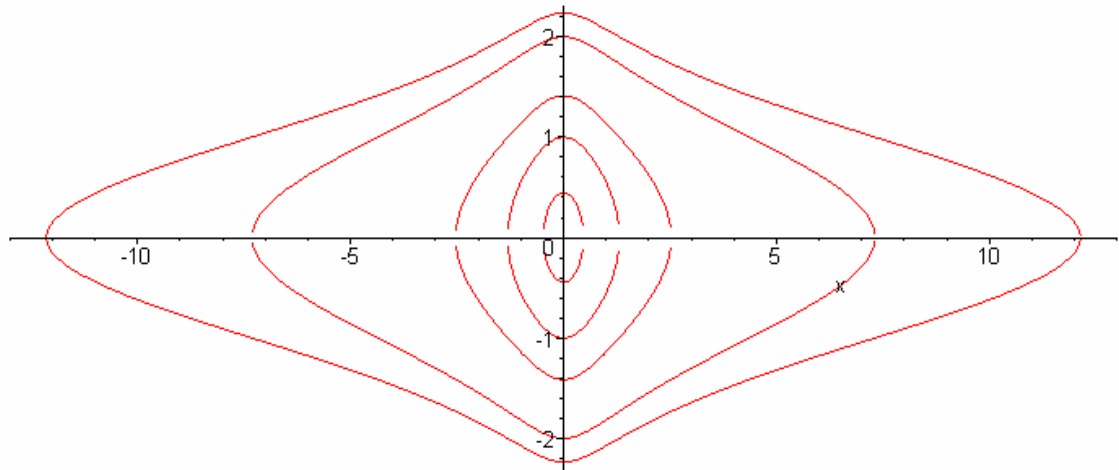
As trajectórias serão obtidas da solução de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{1+x^2}}{y}.$$

Ou seja:

$$y = \pm \sqrt{C - \ln(1+x^2)}.$$

Eis algumas das trajectórias:



É claro que nem sempre será possível obter uma expressão analítica para as trajetórias de um sistema não linear, ou seja, poderemos não conseguir resolver a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Nesses casos, teremos que recorrer à técnica de *linearização*, de forma a obter um sistema linear cujas trajetórias terão um comportamento *semelhante* na proximidade do ponto de equilíbrio.

### **Linearização de um sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio**

Quando não conseguimos obter uma equação analítica para as trajetórias de um problema não linear, resta-nos recorrer à linearização. Consideremos um sistema não linear autónomo, cujo ponto de equilíbrio é  $(0,0)$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

A *linearização em torno do ponto de equilíbrio* é baseada na expansão em série de Taylor de  $P(x, y)$  e de  $Q(x, y)$  em torno do ponto  $(0,0)$ <sup>††</sup>:

<sup>††</sup> Recorde que  $P(0,0) = 0$  e  $Q(0,0) = 0$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(0,0) + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y + R_P(x, y) \approx \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \\ \frac{dy}{dt} = Q(0,0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y + R_Q(x, y) \approx \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \end{cases}$$

$R_P(x,y)$  e  $R_Q(x,y)$  são termos desprezáveis desde que  $(x,y)$  esteja suficientemente próximo de  $(0,0)$ . Ou, mais rigorosamente,  $R_P(x,y)$  e  $R_Q(x,y)$  satisfazem a condição:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{R_P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{R_Q(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

Sistema  
linear  
associado

Ou seja, se estivermos apenas interessados em analisar o que se passa na proximidade do ponto de equilíbrio, então o nosso sistema não linear pode ser “substituído” pelo chamado *sistema linear associado*, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \\ \frac{dy}{dt} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \end{cases}$$

Este sistema é homogéneo, logo nós sabemos como obter as suas trajectórias em torno de  $(0,0)$ . No entanto, é importante salientar que *a solução geral do sistema associado não é a mesma que a solução geral do sistema não linear original!* Existe apenas uma *semelhança qualitativa* no comportamento de ambas as soluções na vizinhança do ponto de equilíbrio. Por outras palavras, o comportamento das trajectórias do sistema linear associado vai-nos dar informação qualitativa sobre o comportamento das trajectórias do sistema não linear.

Eis a seguir uma descrição de como a natureza dos valores próprios ( $I_1$  e  $I_2$ ) da matriz de coeficientes do sistema linear associado se relaciona com a classificação do ponto de equilíbrio do sistema não linear original.

- Se  $I_1$  e  $I_2$  não são *reais e iguais* ou não são *imaginários puros*, então as trajectórias do sistema linear associado na proximidade de  $(0,0)$  são do mesmo tipo e têm a mesma estabilidade que as do sistema não linear.
- Se  $I_1$  e  $I_2$  são *reais e iguais*, então  $(0,0)$  é um nó ou um foco do sistema não linear. Se  $I_1 = I_2 < 0$ , o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Se  $I_1 = I_2 > 0$ , o ponto de equilíbrio é instável.

- Se  $I_1$  e  $I_2$  são *imaginários puros*, então  $(0,0)$  é um centro ou um foco do sistema não linear e a sua estabilidade é indeterminada (pode ser estável, assintoticamente estável ou instável).

A tabela seguinte sumariza estas considerações:

$I_1, I_2$	Sistema linear associado	Sistema não linear	
$I_1 > I_2 > 0$	nó impróprio instável	nó impróprio instável	
$I_1 < I_2 < 0$	nó impróprio estável	nó impróprio estável	
$I_2 < 0 < I_1$	ponto de sela instável	ponto de sela instável	
$I_1 = I_2 > 0$	nó próprio ou impróprio instável	nó próprio ou impróprio ou foco instável	
$I_1 = I_2 < 0$	nó próprio ou impróprio assintoticamente estável	nó próprio ou impróprio ou foco assintoticamente estável	
$I_1 = a + ib$ $I_2 = a - ib$	$a > 0$	foco instável	foco instável
	$a < 0$	foco assintoticamente estável	foco assintoticamente estável
	$a = 0$	centro estável	centro ou foco de estabilidade indeterminada

Antes de concluir esta discussão, temos ainda que considerar a hipótese de o sistema não linear possuir um *ponto, ou pontos, de equilíbrio diferentes de*  $(0,0)$ . Nesse caso, será necessário efectuar uma mudança de variável de forma a permitir aplicar a linearização como descrito anteriormente. Suponhamos que o sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

tem como ponto de equilíbrio o ponto  $(x_e, y_e) \neq (0,0)$ . Aplicando a mudança de variável:

$$\begin{aligned} u &= x - x_e \\ v &= y - y_e \end{aligned}$$

o sistema resultante:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = P(u + x_e, v + y_e) \\ \frac{dv}{dt} = Q(u + x_e, v + y_e) \end{cases} = \begin{cases} \frac{du}{dt} = P_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = Q_1(u, v) \end{cases}$$

terá como ponto de equilíbrio o ponto (0,0). Vejamos um exemplo.

### Exemplo

Consideremos o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 0.25x^2 \end{cases}$$

Quais os pontos de equilíbrio?

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + 0.25x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = 4 \end{cases}$$

Ou seja, o sistema tem dois pontos de equilíbrio: (0,0) e (4,0). Começemos pela análise do ponto (0,0).

Linearizando em torno desse ponto:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(0,0)} y = 0 \times x + 1 \times y = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(0,0)} y = (-1 + 2 \times 0) \times x + 0 \times y = -x \end{cases}$$

O sistema linear associado é assim:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a qual tem valores próprios:  $I_1 = i$  e  $I_2 = -i$ . Assim, (0,0) é um foco do sistema linear associado e um centro ou um foco do sistema não linear original. Nada podemos dizer quanto à sua estabilidade.

Analisemos agora o ponto de equilíbrio (4,0). Primeiro, temos que fazer uma mudança de variável, de forma a obter um novo sistema, cujo ponto de equilíbrio seja (0,0):

$$\begin{aligned} u = x - 4 & \Rightarrow x = u + 4 \\ v = y & \Rightarrow y = v \end{aligned}$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -(u + 4) + 0.25(u + 4)^2 = u + \frac{1}{4}u^2 \end{cases}$$

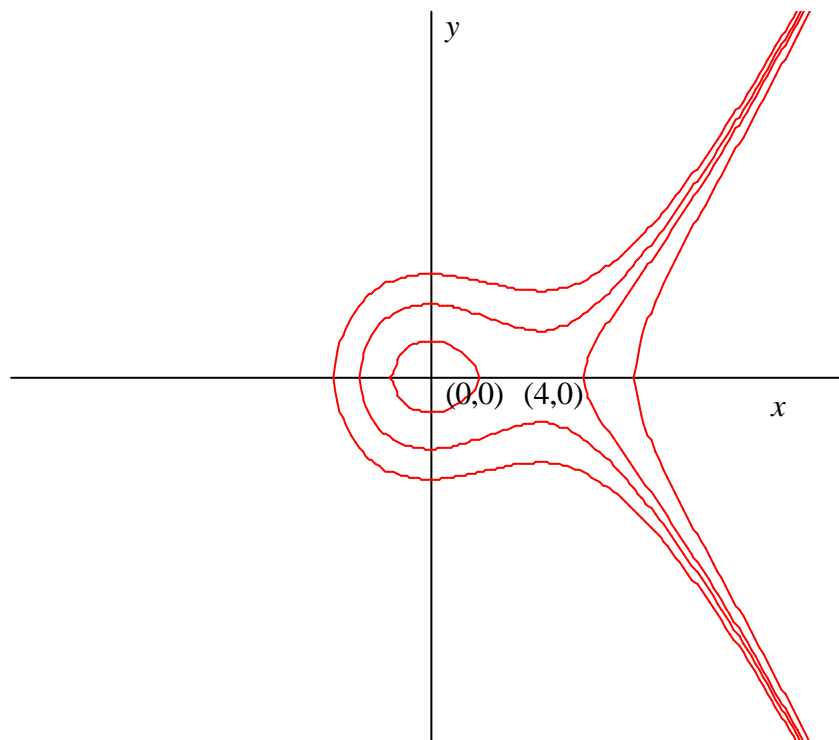
Este novo sistema tem como ponto de equilíbrio o ponto (0,0). Linearizando obtemos :

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é agora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a qual tem valores próprios reais distintos:  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 1$ , logo o ponto de equilíbrio (4,0) é um ponto de sela instável.



A figura anterior representa as trajectórias *do sistema não linear* original traçadas rigorosamente (uma vez que estas podem ser obtidas analiticamente – demonstre). É notório que o comportamento na vizinhança de  $(0,0)$  e  $(4,0)$  é de facto característico de, respectivamente, um centro e um ponto de sela.

---

---

**Sumário da Secção 8**

- Classificação de pontos de equilíbrio de sistemas lineares no plano de fases
    - I. Valores próprios reais, distintos e de sinal igual
    - II. Valores próprios reais, distintos e de sinal diferente
    - III. Valores próprios iguais
      - a. Existem dois vectores próprios linearmente independente
      - b. Não existem dois vectores próprios linearmente independentes
    - IV. Valores próprios complexos conjugados
      - a. Os valores próprios têm parte real nula,  $\mathbf{a} = 0$
      - b. Os valores próprios têm parte real não nula,  $\mathbf{a} \neq 0$
  - Classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio
  - Equações diferenciais não lineares
    - 1) Cálculo das trajectórias de um sistema autónomo
    - 2) Cálculo das trajectórias de uma EDO autónoma de segunda ordem
  - Linearização de um sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio
-