

Lista 1

1. Provar que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e *coerciva*, i.e., $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, então f tem minimizador global em $\mathbb{R}^n$.
2. Provar que se f é contínua em $\mathbb{R}^n$ e, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de nível:
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$$
é limitado, então f tem minimizador global em $\mathbb{R}^n$.
3. Mostre que todo minimizador local isolado é estrito. A recíproca é verdadeira?
4. Dado $c \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, calcule o gradiente e a Hessiana de $f(x) = c^\top x$ e $q(x) = x^\top Ax$.
5. Explique por que minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$ ou minimizar $\alpha f(x) + \zeta$, onde $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}$ são constantes (em relação a x) e $\alpha > 0$.
6. Mostre que, dada uma constante $c > 0$, se $g(t) = o(t)$, então para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que $|g(t)| < ct$.
7. Prove que se f é convexa em Ω convexo, então todo minimizador local é global.
8. Suponha que f é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto de minimizadores globais de f em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.
9. Mostre que $f \in \mathcal{C}^1$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ se e somente se $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.
10. Seja $f(x) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)$. Mostre que $\bar{x} = (0, 0)$ é um ponto estacionário, que a Hessiana de f em $\bar{x}$ é positiva semidefinida, mas que $\bar{x}$ não é minimizador local.
11. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \leq n$, $\text{posto}(A) = m$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^2$. Mostre que se x_* é tal que $Ax_* = b$ e existe $\lambda_* \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(x_*) = A^\top \lambda_*$ e $y^\top \nabla^2 f(x_*) y > 0$, para todo vetor y não nulo em $\mathcal{N}(A)$, então x_* é minimizador local estrito de f em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$.
12. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \leq n$ e posto completo. Encontre a solução analítica de

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} \|x\|_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b. \end{aligned}$$

Dê uma interpretação geométrica.