

Lista 2

1. Seja x_* minimizador local de f em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $x(t)$ uma curva em Ω de classe C^1 *partindo de* x_* , i.e., $x : [0, \epsilon] \rightarrow \Omega$ tal que $\epsilon > 0$, $x(0) = x_*$. Mostre que $\nabla f(x_*)^\top x'(0) \geq 0$.
2. Seja $x(t)$ uma curva factível em Ω de classe C^k *partindo de* $x_* \in \Omega$. Qual a condição necessária de segunda ordem baseada em curvas?
3. Encontre exemplos onde:

- (a) x_* é minimizador local de f em Ω , mas $\nabla f(x_*) \neq 0$.
- (b) x_* é minimizador local de f em Ω , $\nabla f(x_*) = 0$ mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é semidefinida positiva.
- (c) Ω aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, mas x_* não é minimizador local.
- (d) Ω aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, $\nabla^2 f(x_*)$ é semidefinida positiva, mas x_* não é minimizador local.
- (e) Ω aberto, x_* é minimizador local estrito mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é definida positiva.

4. Seja $f \in C^1$ uma função convexa em um convexo Ω . Mostre que se $x_* \in \Omega$ é tal que

$$\nabla f(x_*)^\top (y - x_*) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega,$$

então x_* é minimizador global de f em Ω .

5. Mostre que se $h(x) = Ax - b$, e x_* é minimizador local de f em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$, a hipótese de regularidade não é necessária para provar a existência de multiplicadores de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\nabla f(x_*) + J_h(x_*)^T \lambda = 0.$$

6. Demonstre as condições necessárias de primeira ordem para o problema de minimizar f sujeita a $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ usando o seguinte argumento: se x_* é minimizador local regular, então é possível usar o teorema da função implícita para transformar tal problema em um problema irrestrito e as condições de otimalidade do problema irrestrito implicam nas condições necessárias para o problema original.
7. Considere o problema perturbado $P(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = \varepsilon, \end{aligned}$$

e seja x_* solução regular de $P(0)$. Denotando $x_* = x(0)$ e usando as condições de otimalidade de $P(\varepsilon)$ e o teorema da função implícita para definir $x(\varepsilon)$, mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(x(0)) = -\lambda_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

8. Provar que se x_* é minimizador local de f em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$, onde $f, h \in C^1$ então existem multiplicadores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, nem todos nulos, tais que:

$$\lambda_0 \nabla f(x_*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x_*) = 0.$$

9. Sejam $f, g, p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1$ não lineares, p e q lineares e considere o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0, p(x) \leq 0, q(x) \leq 0\}$. Desenhar o gradiente de f e o conjunto Ω nas seguintes situações:

a) x_* é um minimizador local de f em Ω tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ e um dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições lineares é zero.

b) x_* é ponto regular tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ mas não é um minimizador local de f em Ω .

c) x_* é um minimizador local de f em Ω tal que $g(x_*) = p(x_*) = 0$, $q(x_*) < 0$ mas não é um ponto regular de Ω .

10. Uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ é dita *tangente* em $x_* \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, se existe $\{x_k\} \subset \Omega$ tal que $x_k \rightarrow x_*$ e $\frac{x_k - x_*}{\|x_k - x_*\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$. Mostre que se d é tangente em x_* então $\nabla h_i(x_*)^\top d = 0, \forall i$ e $\nabla g_j(x_*)^\top d \leq 0$ para todo j índice de restrição ativa em x_* .

11. Considere o problema de minimizar uma quadrática em uma bola $B(0, \Delta)$:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^\top Bx + c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & \|x\|_2^2 \leq \Delta^2. \end{aligned}$$

Quais as condições de otimalidade para este problema? Quando a solução é única?

12. Mostre que se x_* é minimizador local de

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, então $d_* = 0$ é solução de

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \nabla f(x_*)^\top d \\ \text{s.a.} \quad & Ad = 0. \end{aligned}$$

13. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções continuamente diferenciáveis. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $h(x) = 0$ e seja x_* um minimizador local deste problema. Prove que, ou existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_*) = \lambda \nabla h(x_*)$, ou então $\nabla h(x_*) = 0$.

14. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ e $g_j(x) = a_j^T x - b_j$, para $j = 1, 2$.

(a) Mostre que, se num dado ponto x as restrições são ativas, $\{\nabla g_i(x)\}_{i=1}^2$ é L.I., e

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^2 \mu_j \nabla g_j(x) = 0,$$

com algum $\mu_j < 0$, então existe uma direção factível e de descida d a partir de x .

(b) Se em (a) todos os multiplicadores são não negativos e $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva, podemos afirmar que x é mínimo local?