

Lista 5

1. Se $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x$, com Q simétrica positiva definida, mostre que a partir de qualquer x_k a direção de Newton satisfaz Armijo com $\sigma \leq 1/2$.

2. Provar que para correção BFGS, vale a relação:

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(s_k - B_k^{-1}y_k)s_k^T + s_k(s_k - B_k^{-1}y_k)^T}{s_k^T y_k} - \frac{(s_k - B_k^{-1}y_k)^T y_k s_k s_k^T}{(s_k^T y_k)^2}.$$

3. Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mostre que $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é a matriz simétrica mais próxima de A na norma de Frobenius.

4. Mostre que, se $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x$ com Q simétrica positiva definida, a fórmula de atualização simétrica de posto um (SR1) está bem definida em todas as iterações, $t_k = 1$ para todo k e os incrementos são linearmente independentes, então x_{n+1} é minimizador(global) de $f(x)$.
5. Seja A simétrica positiva definida. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são A -conjugados.
6. Mostre que as direções em $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ são A -conjugadas, então tais direções são linearmente independentes.
7. Mostre que no *método de direções conjugadas* para minimizar uma quadrática com Hessiana simétrica definida positiva:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

onde $\{d_k\}$ são A -conjugadas e α_k é obtido por busca linear exata, g_{k+1} é ortogonal a $\text{span}\{d_0, d_1, d_2, \dots, d_k\}$.

8. Provar que os resíduos $\{g_0, \dots, g_k\}$ gerados pelo método de gradientes conjugados são mutuamente ortogonais.
9. Prove que o coeficiente β_{k+1} na iteração de gradientes conjugados pode ser escrito como

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle g_{k+1}, g_{k+1} \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}.$$

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e definida positiva. Mostre que se $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ são vetores linearmente independentes, então as direções $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ definidas por:

$$d_0 = p_0,$$

$$d_{k+1} = p_{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{p_{k+1}^T A d_i}{d_i^T A d_i} d_i,$$

são A -conjugadas.

11. Mostre que se $f(x)$ é quadrática estritamente convexa, então a função

$$\phi(\sigma) = f(x_0 + \sigma_0 d_0 + \cdots + \sigma_{k-1} d_{k-1})$$

é também quadrática estritamente convexa em σ .

12. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mostre que se B é simétrica definida positiva, então

$$\frac{\|g\|^4}{(g^T B g)(g^T B^{-1} g)} \leq 1.$$

13. Proponha um algoritmo para minimizar $q(d) = \frac{1}{2} d^T B d + g^T d$ sujeito a $\|d\| \leq \Delta$, onde $\Delta > 0$ e B é simétrica, mas não necessariamente definida positiva. Explore a caracterização das soluções deste problema e decomposição espectral de B .
14. Mostre que se $\{x_k\}$, a sequência gerada pelo método de Newton com região de confiança, converge a x_* minimizador local de $f(x)$ tal que $\nabla^2 f(x_*)$ é positiva definida, então existe $k_0 > 0$ tal que para $k \geq k_0$, a direção de Newton é sempre aceita.