Lista 2

1. Considere o sistema triangular superior

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

   Se $a_{ii} \neq 0, \forall i$, determine a expressão para as componentes x_1, x_2, x_3 da solução. Considere agora um sistema triangular superior $n \times n$, com $a_{ii} \neq 0, \forall i$. Usando notação de somatório, determine uma expressão para x_i.

2. Usando operações elementares por linhas, reduza o sistema abaixo a um sistema triangular superior equivalente e resolva usando substituição reversa.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ z + 2t = 5 \end{cases}.$$

3. Determine o valor de x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -8 & -3 \\ x & -3 & -1 \end{bmatrix}$ tenha posto igual a 2.

4. Usando o processo de redução a forma linha degrau, resolva os seguintes sistemas:

   a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$.

   Determine se o sistema é consistente ou inconsistente. Se for consistente com infinitas soluções, determine quais as variáveis principais e quais as variáveis livres.

5. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} au + v = 1 \\ 4u + av = 2 \end{cases}.$$

   Encontre três valores de a para os quais: a elimanação Gaussiana é concluída sem troca de linhas, pode ser concluída com troca de linhas e não pode ser concluída.

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 6x + 4y &= u. \end{aligned}$$

   Encontre valores para u de modo que o sistema tenha nenhuma ou infinitas soluções.

7. Considere o sistema linear

$$\begin{aligned} 3x + by &= 10 \\ 6x + 4y &= u. \end{aligned}$$

Escolha um valor para b que torne este sistema singular. A seguir, escolha u de modo que o sistema admita solução. Encontre pelo menos duas soluções distintas (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Mostre que que $\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2)$ também é solução, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. É possível que um sistema linear tenha exatamente duas soluções? Por quê ? Se (x, y, z) e (u, v, w) são duas soluções, qual é a outra? Se 25 planos se cruzam em dois pontos, onde mais eles se cruzam?

9. Os dois sistemas

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

tem a mesma matriz de coeficientes, mas lados direitos distintos. Utilize a eliminação Gaussiana sobre a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right],$$

para resolver os dois sistemas simultaneamente.

10. Encontre a inversa da matriz abaixo, usando elimação de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Mostre que a "regrinha das diagonais" para o cálculo de determinantes 3×3, coincide com a definição de determinantes vista em aula.

12. Usando a definição, mostre que se A possui uma linha de zeros, então $\det(A) = 0$.

13. Por que $\det(A) = 0$ quando a linha i é múltipla da linha j de A?

14. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcule os determinantes a seguir.

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix}$

15. Prove que A é singular se e somente se $\det(A) = 0$.

16. É possível uma matriz 3×3 com posto 2 ser não-singular?

17. Quantas operações (adição/multiplicação) são realizadas para se calcular $\det(A)$ pela definição? Proponha uma forma mais barata para se calcular $\det(A)$. Estime o número de operações necessárias para se resolver um sistema linear pela Regra de Cramer.