Lista 3

1. Mostre que o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas(com entradas reais) é um espaço vetorial.

2. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais com adição definida por
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
e produto por escalar definido por
$$\alpha \cdot (x_1, x_2) := (\alpha x_1, x_2).$$
O conjunto V com estas operações é uma espaço vetorial?

3. Seja $\mathbb{R}_+$ o conjunto de todos os números reais positivos. Considere o produto por escalar definido por
$$\alpha \cdot x := x^\alpha,$$
e a adição definida por
$$x + y := xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$
$\mathbb{R}_+$ com estas operações é um espaço vetorial?

4. Dados $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$, encontre valores de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (1, 1, 1)$. Expresse o vetor $(1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (2, -3, 5)$.

5. Usando os axiomas de espaço vetorial prove a seguinte afirmação: "Num espaço vetorial V existe um único vetor nulo e cada elemento de V possui um único inverso aditivo".

6. Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais. Considere o produto cartesiano $V = V_1 \times V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique os axiomas. Mostre que o mesmo é válido para um produto cartesiano de espaços vetoriais $V_1, V_2, \dots, V_n$, ou mesmo para uma sequência infinita $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ de espaços vetoriais.

7. Seja V um espaço vetorial e $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$. Mostre que
$$\text{span}(X) = \{w \in V \,|\, w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m, \alpha \in \mathbb{R}^m\}$$
é um subespaço vetorial de V.

8. Seja X o subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas sequências $v = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ que têm apenas um número finito de termos x_n não nulos. Mostre que X é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ e que as sequências que têm um único termo não nulo constituem um conjunto de geradores para X.

9. Seja $\mathbb{R}^{n \times n}$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ de entradas reais. Considere V_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores e V_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores de ordem n. Mostre que $\mathbb{R}^{n \times n} = V_1 + V_2$, mas não é verdade que $\mathbb{R}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$. Prove que, se V_1 é conjunto das matrizes simétricas e V_2 é o conjunto das matrizes anti-simétricas, então $\mathbb{R}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$.

10. Mostre que $\mathrm{span}(X)$ é a intersecção de todos os subespaços vetoriais que contêm o conjunto $X \subset V$.

11. Mostre que as matrizes abaixo são linearmente independentes:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Considere o espaço de polinômios de grau menor ou igual a 3. Verifique se os polinômios abaixo são L.D. ou L.I.:
$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 3x^2 + 5x + 1, \\ q(x) &= x^3 - x^2 + 6x + 2, \\ r(x) &= x^3 - 7x^2 + 4x. \end{aligned}$$

13. Seja $V = V_1 \oplus V_2$. Se B_1 é base de V_1 e B_2 é base de V_2, prove que $B_1 \cup B_2$ é base de V.

14. Seja X um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $x = (x_1, x_2, x_3)$ tais que $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$. Obtenha uma base $\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que $u_1, u_2 \in X$.

15. Mostre que os polinômios 1, $x - 1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

16. Sejam $u, v \in V$ vetores L.I. Dado um escalar $\alpha \neq 0$, prove que o conjunto $\{v, v + \alpha u\}$ é uma base do subespaço gerado pelos vetores $v, v + u, v + 2u, \ldots, v + nu, \ldots$.

17. Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais abaixo e determine sua dimensão:
    a) polinômios pares de grau $\leq n$
    b) polinômios ímpares de grau $\leq n$
    c) polinômios de grau $\leq n$ que se anulam para $x = 2$ e $x = 3$.
    d) vetores de $\mathbb{R}^n$ nos quais a primeira e última coordenadas são iguais.

18. Mostre que os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ e $w = (1, 4, 9)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Exprima cada um dos vetores canônicos e_1, e_2, e_3 como combinação linear de u, v e w.

19. Suponha que as colunas de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Mostre que $Ax = 0$ admite apenas a solução trivial. Explique porque $Ax = b$ tem solução para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

20. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

21. Existem subespaços próprios de $\mathbb{R}$?

22. Considere os vetores $\cos(x + \alpha)$ e $\sin x$ em $C[-\pi, \pi]$ (o conjunto das funções contínuas em $[-\pi, \pi]$). Para que valores de α este vetores serão L.D.?

23. Por que qualquer conjunto finito de vetores que contém o vetor nulo é L.D. ?

24. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores L.I. de um espaço vetorial V. Mostre que $\mathrm{span}(v_2, \ldots, v_n) \neq V$.

25. Em $C[-\pi, \pi]$, encontre a dimensão do subespaço gerado por 1, $\cos 2x$ e $\cos^2 x$.

26. É possível encontrar um par de subespaços bidimensionais de U e V de $\mathbb{R}^3$, tais que $U \cap V = \{0\}$?

27. Mostre que se U e V são subespaços vetorias de $\mathbb{R}^n$ e $U \cap V = \{0\}$, então
$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$