Lista 4

1. Seja $u_1 = (1,1,1)^T$, $u_2 = (1,2,2)^T$ e $u_3 = (2,3,4)^T$.
   a) Encontre a matriz de mudança de base de $\{e_1, e_2, e_3\}$ para $\{u_1, u_2, u_3\}$.
   b) Encontre as coordenadas dos seguintes vetores em relação a base $\{u_1, u_2, u_3\}$:
   (i) $(3,2,5)^T$, (ii) $(1,1,2)^T$, (iii) $(2,3,2)^T$.

2. Encontre a matriz de mudança de base representando a mudança de coordenadas em P_3 da base ordenada $[1, x, x^2]$, para a base ordenada $[1, 1+x, 1+x+x^2]$.

3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x - y\|_2 = \|x + y\|_2$. Quanto vale $x^T y$?

4. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

5. Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a $u = (3, -2)$.

6. Considere o conjunto de vetores
$$u_1 = (1,-1,0,2), \quad u_2 = (1,1,1,0), \quad u_3 = (-1,-1,2,0).$$
   (a) Usando o produto interno padrão em $\mathbb{R}^4$, verifique que estes vetores são mutuamente ortogonais.
   (b) Encontre um vetor não-nulo u_4 tal que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ seja um conjunto de vetores mutuamente ortogonais.
   (c) Converta tal conjunto em uma base ortonormal para $\mathbb{R}^4$.

7. Determine o ângulo entre $v_1 = (2,-1,1,0)$ e $v_2 = (1,1,2,0)$.

8. Construa um exemplo em $\mathbb{R}^n$, usando o produto interno padrão, para mostrar que dois vetores x e y podem ter um ângulo que está próximo de $\pi/2$ sem que $x^T y$ esteja próximo de zero.

9. Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} |\langle u_i, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$
   e que a igualdade é verdadeira somente se $x \in \operatorname{span}(\{u_1, \ldots, u_k\})$.

10. Usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir do conjunto de vetores linearmente independentes:
$$x_1 = (1,1,1),\ x_2 = (-1,-1,1),\ x_3 = (1,0,0).$$

11. Mostre que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, isto é $Q^T Q = QQ^T = I$, então $\|Qx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

12. Sejam $u = (-2,1,3,-1)$ e $v = (1,4,0,-1)$. Determine:
   (a) a projeção ortogonal de u em $\operatorname{span}(v)$;
   (b) a projeção de v em $\operatorname{span}(u)$;
   (c) a projeção de u sobre $v^\perp$;
   (d) a projeção de v sobre $u^\perp$.