Lista 5

1. Quais das transformações abaixo são transformações lineares?
   a) $T(v) = v/\|v\|$ b) $T(v) = v_1 + v_2 + v_3$
   c) $T(v) = (v_1, 2v_2, 3v_3)$ d) $T(v) = \max_{1 \leq i \leq 3}\{v_i\}$

2. Seja $A : V \to W$ uma transformação linear. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   a) Se $v \in V$ é tal que $Av = 0$ então $v = 0$.
   b) Se $Aw = Au + Av$ então $w = u + v$.
   c) Se v é combinação linear de $u_1, \ldots, u_m$ então Av é combinação linear de $Au_1, \ldots, Au_m$.
   d) Se $u, v, w \in V$ são colineares então Au, Av, Aw são colineares.

3. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.
   a) Se os vetores $Tv_1, \ldots, Tv_n$ são L.I., prove que $v_1, \ldots, v_n$ são L.I.
   b) Se $V = W$ e $\text{span}(\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}) = V$, prove que $v_1, \ldots, v_n$ geram V.
   c) Valem as recíprocas de (a) e (b)? Se $V \neq W$, (b) continua verdadeira?

4. Determine matrizes 3×3 que representam as seguintes transformações:
   a) projeção sobre o plano xy
   b) reflexão em relação ao plano xy
   c) rotação de vetores no plano xy em 90^o em torno do eixo z

5. Mostre que a combinação linear de transformações lineares é uma transformação linear.

6. Considere $V = \mathbb{R}^2$. Que matriz tem o efeito de girar vetores em 90^o em torno da origem e em seguida projetar o resultado sobre o eixo x? Que matriz representa a projeção sobre o eixo x seguida da projeção sobre o eixo y ?

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção sobre o eixo x, paralelamente a reta $y = ax$ ($a \neq 0$). Isto significa que, para todo $v = (x, y)$, $Tv = (\hat{x}, 0)$, tal que $v - Tv$ pertence a reta $y = ax$. Determine $\hat{x}$ em função de x e y e encontre a matriz A desta transformação linear em relação a base canônica.

8. Qual a base canônica para o espaço de matrizes 2×2? Determine a matriz $\mathcal{A}$ da transformação linear "transposição" em relação a base canônica. Por que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$?

9. Prove que T^2 é uma transformação linear se T for transformação linear.

10. Suponha que uma transformação linear T leve (1,1) em (2,2) e (2,0) em (0,0). Encontre $T(x_1, x_2)$.

11. a) Que matriz transforma (1,0) em (2,5) e (0,1) em (1,3)?
b) Que matriz transforma (2,5) em (1,0) e (1,3) em (0,1)?
c) É possível encontrar uma matriz que transforme (2,6) em (1,0) e (1,3) em (0,1)?

12. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que o núcleo e a imagem de T são subespaços vetoriais de V e W respectivamente.

13. Encontre o núcleo e imagem das seguintes transformações lineares:
a) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$
c) $T(x_1, x_2) = (0, 0)$ d) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1)$.

14. Defina um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tenha como núcleo e imagem o eixo x.

15. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
a) Uma transformação linear $T : V \to W$ é sobrejetiva se, e somente se, $\dim \mathcal{N}(T) = \dim V - \dim W$.
b) Dada a transformação linear $A : V \to W$, para todo b fixado em W, o conjunto $G = \{x \in V : Ax = b\}$ é um subespaço vetorial de V.
c) Para todo operador linear $T : V \to V$, tem-se que $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T)$.
d) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão pelo menos 3.

16. Quais das transformações lineares abaixo admitem inversa?
a) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_2)$ b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$ c) $T(x_1, x_2) = x_1$.

17. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Suponha que $\mathcal{R}(T) = \mathbb{R}^2$. Por que $T^{-1}(x + y) = T^{-1}x + T^{-1}y$? Mostre que se T é representada pela matriz A, então T^{-1} é representada pela matriz A^{-1}.

18. Considere a equação de uma parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$. Suponha que $y(x_1) = 4,\ y(x_2) = 5, y(x_3) = 6$. Que equações lineares devem ser satisfeitas por a, b, c? Que condições x_1, x_2, x_3 devem satisfazer para que tal parábola possa ser determinada unicamente?

19. Suponha que todos os vetores x no quadrado unitário $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$ são transformados em Ax, onde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
a) Qual o formato da região transformada?
b) Para que matrizes A a região transformada é quadrada?
c) Para que matrizes A tal região é uma reta?
d) Para que matrizes A tal região também tem área 1?

20. Dizemos que um subconjunto C de um espaço vetorial é *convexo* se para quaisquer $u, v \in C$, tem-se que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$, para todo $\alpha \in (0, 1)$. Mostre que a imagem de C por uma transformação linear também é um conjunto convexo.