Lista 6

1. Suponha que as colunas de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Mostre que $Ax = 0$ admite apenas a solução trivial. Explique porque $Ax = b$ tem solução para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{64\times 17}$, com 11 colunas linearmente independentes. Determine a dimensão de $N(A)$ e $N(A^T)$.

4. Encontre a solução *completa* do sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + \ \ 5w = 0 \\ 2x + 4y + 8z + 12w = 6 \\ 3x + 6y + 7z + 13w = -6 \end{cases}.$$

5. Encontre uma base para o espaço linha e espaço coluna das matrizes abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Quantas soluções tem o sistema linear $Ax = b$ se b está no espaço coluna de A e as colunas de A são L.D.?

7. Seja A uma matriz $m \times n$ com $m > n$. Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e suponha que $N(A) = \{0\}$.
a) O que pode-se afirmar sobre os vetores coluna de A? Eles são L.I.? Eles cobrem $\mathbb{R}^m$? Explique.
b) Quantas soluções terá o sistema $Ax = b$?

8. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $\text{posto}(A) \le \min(m, n)$.

9. Mostre que o sistema linear $Ax = b$ é consistente se, e somente se, o posto de $(A|b)$ é igual ao posto de A.

10. Sejam A e B matrizes $m \times n$. Prove que $\text{posto}(A + B) \le \text{posto}(A) + \text{posto}(B)$.

11. Sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$ e $A = xy^T$. (a) Mostre que $[x]$ é uma base para $R(A)$ e $[y]$ é uma base para $R(A^T)$. (b) Qual a dimensão de $N(A)$?

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e x_0 uma solução particular de $Ax = b$. Mostre que:
a) Um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ é solução de $Ax = b$ se, e somente se, $y = x_0 + z$, onde $z \in N(A)$.
b) Se $N(A) = \{0\}$, então a solução x_0 é única.

13. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $C = AB$. Mostre que:
a) o espaço coluna de C é um subespaço do espaço coluna de A.
b) o espaço linha de C é um subespaço do espaço linha de B.
c) $\text{posto}(C) \le \min(\text{posto}(A), \text{posto}(B))$.