Lista 7

1. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que o conjunto de autovetores associado a um autovalor λ é um subespaço vetorial de V.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz invertível. Qual é a relação entre os autopares (autovalores e autovetores) de A e A^{-1}?

3. Sejam $(\lambda_1, v1)$ e (λ_2, v_2) autopares de A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

4. Mostre que os autovalores de $A^T A$ e AA^T são todos não-negativos.

5. Mostre que o determinante de A é igual ao produto de seus autovalores.

6. Mostre que o traço de A (soma dos elementos da diagonal principal) é igual a soma de seus autovalores.

7. Prove que os autovalores de uma matriz anti-simétrica são imaginários puros.

8. Mostre que se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes similares, então A, B possuem os mesmos autovalores. O que pode-se dizer dos autovetores ?

9. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é similar a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $\text{posto}(A) = \text{posto}(B)$.

10. Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$, prove que A e B possuem um autovetor em comum.

11. Mostre que se $A = A^T$ então todos seus autovalores são reais.

12. Sejam $(\lambda_1, v1)$ e (λ_2, v_2) autopares de uma matriz simétrica A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são ortogonais.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com s autovalores distintos $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$, com $s \leq n$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se,
$$\mathbb{R}^n = N(A - \lambda_1 I) \oplus N(A - \lambda_2 I) \oplus \ldots \oplus N(A - \lambda_s I).$$

14. Sejam $c, d \in \mathbb{R}^n$ não nulos. Prove que a matriz $A = cd^T$ é diagonalizável se, e somente se, $d^T c \neq 0$.

15. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Mostre que
$$\lambda_n \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1,$$
onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ são os autovalores de A.

16. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$
Encontre uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ são diagonais.

17. Uma matriz A é dita idempotente se $A^2 = A$. Mostre que se λ é autovalor de A idempotente, então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Sejam v um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$ e $A = vv^T$. Mostre que A é idempotente e que v é um autovetor de A. A é diagonalizável?

18. Seja A uma matriz quadrada e $B = A + \alpha I$. Qual a relação entre os autovalores de A e B?

19. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A e A^T têm o mesmo polinômio característico. Podemos afirmar que elas têm os mesmo autovetores?

20. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora. A recíproca é verdadeira?

21. Seja A uma matriz diagonalizável com autovalores 1 ou -1. Determine A^{-1}.

22. Mostre que qualquer matriz da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

23. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Assuma que V é de dimensão finita e que $T^2 = T$. Mostre que T é diagonalizável.

24. Sejam x e y vetores não nulos do $\mathbb{R}^n$. Sendo $A = xy^T$, mostre que:

    a) Zero é um autovalor de A com multiplicade geométrica ao menos $n - 1$.
    b) O outro autovalor é $\lambda_n = x^T y$, sendo x o autovetor associado.
    c) Se $\lambda_n \neq 0$ então A é diagonalizável.

25. Sejam P e Q matrizes unitárias de ordem n. Mostre que:

    a) PQ também é unitária.
    b) Se λ é autovalor de Q, então $|\lambda| = 1$.
    c) $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ e $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$.