Lista 1

1. Provar que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o *conjunto de nível*:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$$

é limitado, então f possui minimizador global em $\mathbb{R}^n$.

2. Provar que se f é contínua em $\mathbb{R}^n$ e *coerciva*, i.e., $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, então f possui minimizador global em $\mathbb{R}^n$.

3. Mostre que todo minimizador local isolado é estrito. A recíproca é verdadeira?

4. Dado $c \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica, calcule o gradiente e a Hessiana de $f(x) = c^\top x$ e $q(x) = x^\top Ax$.

5. Seja $q(x)$ uma quadrática com Hessiana definida positiva. Sem usar argumentos de convexidade, mostre que x^* é o único minimizador *global* de q em $\mathbb{R}^n$ se e somente se $\nabla q(x^*) = 0$.

6. Explique por que minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$ ou minimizar $\alpha f(x)+\zeta$, em que $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}$ são constantes(em relação a x) e $\alpha > 0$.

7. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mostre que minimizar $f(x)$ equivale a minimizar $g(f(x))$.

8. Mostre que, dada uma constante $c > 0$, se $g(t) = o(t)$, então para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que $|g(t)| < c\,t$.

9. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Encontre exemplos onde:
   (a) x_* é minimizador local de f em Ω, mas $\nabla f(x_*) \neq 0$.
   (b) x_* é minimizador local de f em Ω, $\nabla f(x_*) = 0$ mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é semidefinida positiva.
   (c) Ω aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, mas x_* não é minimizador local.
   (d) Ω aberto, $\nabla f(x_*) = 0$, $\nabla^2 f(x_*)$ é semidefinida positiva, mas x_* não é minimizador local.
   (e) Ω aberto, x_* é minimizador local estrito mas $\nabla^2 f(x_*)$ não é definida positiva.

10. Prove que se f é convexa em Ω convexo, então todo minimizador local é global.

11. Suponha que f é uma função convexa em $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto de minimizadores globais de f em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

12. Mostre que $f \in \mathcal{C}^1$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ se e somente se $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

13. Seja $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$ e $\bar{x} = (0, 0)$. Verifique que $t = 0$ é um minimizador local de $\phi(t) = f(\bar{x} + td)$ para qualquer $d \in \mathbb{R}^2$, mas $\bar{x}$ não é minimizador local de f.

14. Considere o problema de minimizar $\frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$, em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Este problema sempre tem solução? A solução é única? Considere todos os casos possíveis (quanto ao posto de A e se b pertence ou não a imagem de A) e forneça uma interpretação geométrica.