Lista 3

1. Mostre que se x não é ponto estacionário de f em $\mathbb{R}^n$, a direção unitária que minimiza $\nabla f(x)^T d$ é dada por $d = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$.

2. Prove que se $f \in \mathcal{C}^1$ possui gradiente Lipschitz de constante $L > 0$, então
$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T (y - x)| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

3. Considere o método de máxima descida $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$, e assuma que f é convexa, tem pelo menos um minimizador, e possui gradiente Lipschitz de constante $L > 0$. Mostre que, se existe $\epsilon > 0$ tal que
$$\epsilon \leq t_k \leq \frac{2-\epsilon}{L}, \quad \forall k,$$
então x_k converge para algum minimizador de f.

4. Seja $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton puro para minimizar f em $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^3$. Seja x_* um ponto que satisfaz as condições suficientes de 2^a ordem. Mostre que para x_0 suficientemente próximo de x_*, a sequência Newtoniana está bem definida, converge a x_*, e a taxa de convergência é quadrática. Se f é apenas de classe $\mathcal{C}^2$ o que podemos dizer sobre a taxa de convergência?

5. Mostre que se A é não-singular então $A + uv^T$ é não singular, se e somente se $v^T A^{-1} u \neq -1$. Neste caso
$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

6. Usando a fórmula de Sherman-Morisson-Woodbury, determine a forma dual da correção BFGS.

7. Mostre que se f é estritamente convexa e diferenciável então $y_k^T s_k > 0$ para os métodos Quase-Newton secantes.

8. Mostre que se $\|B_k\|$ e $\|B_k^{-1}\|$ são limitadas para todo $k \geq 0$, então a direção de busca nos métodos Quase-Newton satisfaz as condições de ângulo e proporcionalidade.

9. Mostre que para métodos secantes a condição de Dennis-Moré será satisfeita se
$$\lim_{k \to \infty} \|B_{k+1} - B_k\| = 0.$$

10. Mostre que, se $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$ com A simétrica positiva definida, a fórmula de atualização simétrica de posto um (SR1) está bem definida em todas as iterações, $t_k = 1$ para todo k e os incrementos são linearmente independentes, então x_{n+1} é minimizador(global) de $f(x)$. (Dica: primeiro mostre que $B_k s_i = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$ e utilize este fato para mostrar que $B_n = A$).

11. Mostre que se a Jacobiana de $F(x)$ é Lipschitz, de constante L em Ω, e $x_* \in \Omega$ é tal que $F(x_*) = 0$ e $J(x_*)$ não-singular, então para todo $x, z, x_* \in \Omega$:
$$\|F(z) - F(x) - J(x_*)(z - x)\| \leq L\|x - z\| \max\{\|x - x_*\|, \|z - x_*\|\}.$$
Prove também que para todo $x \in \Omega$: $\|F(x) - J(x_*)(x - x_*)\| \leq \dfrac{L}{2}\|x - x_*\|^2$.

12. Seja A uma matriz não-singular e $\{x_k\}$ a sequência gerada pelo método de Newton aplicado ao problema $F(x) = 0$. Qual a relação de $\{x_k\}$ com as iterações de Newton aplicado ao sistema $AF(x) = 0$? E qual a relação de $\{x_k\}$ com respeito aos iterados de Newton para o problema $F(Ax + b) = 0$?