Lista 4

1. Seja A simétrica positiva definida. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são A-conjugados.

2. Mostre que se as direções em $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ são A-conjugadas, então tais direções são linearmente independentes.

3. Mostre que no *método de direções conjugadas* para minimizar uma quadrática com Hessiana simétrica definida positiva:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

onde $\{d_k\}$ são A-conjugadas e α_k é obtido por busca linear exata, r_{k+1} é ortogonal a $span\{d_0, d_1, d_2, \dots, d_k\}$.

4. Provar que os resíduos $\{r_0, \dots, r_k\}$ gerados pelo método de gradientes conjugados são mutuamente ortogonais.

5. Prove que o coeficiente β_{k+1} na iteração de gradientes conjugados pode ser escrito como

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle r_{k+1}, r_{k+1} \rangle}{\langle r_k, r_k \rangle}.$$

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e definida positiva. Mostre que se $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ são vetores linearmente independentes, então as direções $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ definidas por:

$$d_0 = p_0,$$

$$d_{k+1} = p_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{p_{k+1}^T A d_i}{d_i^T A d_i} d_i,$$

são A-conjugadas.

7. Mostre que se $f(x)$ é quadrática estritamente convexa, então a função

$$\phi(\sigma) = f(x_0 + \sigma_0 d_0 + \dots + \sigma_{k-1} d_{k-1})$$

é também quadrática estritamente convexa em σ.

8. Considere a quadrática $q(x) = (1/2)x^T A x - b^T x$ e a mudança de variáveis $\hat{x} = Cx$, onde C é não singular. Escreva o método de gradientes conjugados aplicado a $\hat{q}(\hat{x}) = q(C^{-1}\hat{x})$ e transforme-o de volta em termos das variáveis originais. (Denote $C^T C = M$).

9. * Mostre que a sequência gerada pelo método BFGS, com busca linear exata e $B_0 = I$, para minimizar uma quadrática s.p.d. é idêntica a sequência gerada pelo método de grandientes conjugados. (Dica: consulte Sec. 2.2 de Bertsekas)