Lista 5

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \leq n$, posto$(A) = m$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^2$. Mostre que se x_* é tal que $Ax_* = b$ e existe $\lambda_* \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(x_*) = A^T\lambda_*$ e $y^T\nabla^2 f(x_*)y > 0$, para todo vetor y não nulo em $\mathcal{N}(A)$, então x_* é minimizador local estrito de f em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$.

2. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x^TQx - c^Tx \\ \text{s.a} & Ax = b. \end{array}$$
onde Q é simétrica e Z^TQZ é definida positiva, onde $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{N}(A)$. Prove que a solução $\bar{x}$ é dada por
$$\bar{x} = x_0 - Z(Z^TQZ)^{-1}Z^T(Qx_0 - c),$$
onde x_0 é uma solução particular de $Ax = b$.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \leq n$ e posto completo. Encontre a solução analítica de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}\|x\|_2^2 \\ \text{s.a} & Ax = b. \end{array}$$
Dê uma interpretação geométrica.

4. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$ e posto completo. Encontre a projeção de c em $\mathcal{N}(A)$, i.e., resolva o problema
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}\|x - c\|_2^2 \\ \text{s.a} & Ax = 0. \end{array}$$

5. Considere o problema (P): minimizar $f(x)$ sujeito a $Ax = b$, onde $f \in \mathcal{C}^1$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, A de posto completo. Seja $\bar{d}$ solução de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{d} & \frac{1}{2}\|\nabla f(x) + d\|_2^2 \\ \text{s.a} & Ad = 0. \end{array}$$
Encontre a solução $\bar{d}$ e interprete-a geometricamente. Se x é minimizador local de (P), quanto vale $\|\bar{d}\|$?

6. Mostre que se x_* é minimizador local de f sujeita a $Ax = b$, com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, então $d_* = 0$ é solução de
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{d} & \nabla f(x_*)^\top d \\ \text{s.a} & Ad = 0. \end{array}$$

7. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, tem posto completo e Q é simétrica e tal que $d^TQd > 0$ para todo $d \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\}$, então
$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$
é não-singular.