Lista 6

1. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Escreva as condições de otimalidade.
b) Para cada ponto extremo da região viável, verifique se as condições de otimalidade são satisfeitas.

2. Qual a relação entre as soluções de minimizar $f(x)$ sujeito a $Ax \leq b$ e do sistema não linear

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + A^T\mu &= 0 \\ (a_i^T x - b_i)\mu_i &= 0 \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

3. Considere o problema de otimização com restrições de caixa: minimizar $f(x)$ sujeito a $\ell_i \leq x_i \leq u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Denote $g = \nabla f(x)$ e considere a direção

$$d = \begin{cases} 0 & \text{se } (x_i = \ell_i \text{ e } g_i \geq 0),\ \text{ou } (x_i = u_i \text{ e } g_i \leq 0) \\ -g_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Prove que d é uma direção factível e de descida em x.
b) Prove que $d = 0$ se, e somente se x satisfaz as condições necessárias de primeira ordem.

4. Resolva o problema de otimização

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 x_2 \ldots x_n \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

A seguir deduza a desigualdade entre média geométrica e aritmética.

5. Resolva algébrica e graficamente o problema abaixo usando um método de restrições ativas.

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & (x_1, x_2) \geq 0. \end{aligned}$$

6. Considere o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde Q é simétrica definida positiva. Mostre que se $\bar{x}$ é viável e satisfaz as condições necessárias de primeira ordem, então $\bar{x}$ é minimizador global deste problema.