Lista 7

1. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $h(x) = 0$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são de classe $\mathcal{C}^2$. Se $\bar{x}$ é tal que $h(\bar{x}) = 0$, $\nabla f(\bar{x}) + J_h(\bar{x})^T \lambda = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x})$ é positiva semidefinida, então $\bar{x}$ é minimizador local? Prove ou dê contra-exemplo.

2. Encontre todos os pontos estacionários do problema de minimizar $f(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2$ sujeita a $h(x) = 0$, onde:

   a) $h(x) = x_1 - 1$ b) $h(x) = x_1 x_2 - 1$ c) $h(x) = x_1 x_2 x_3 - 1$.

3. Encontre funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que exista minimizador local para o problema de min. $f(x)$ sujeita a $h(x) = 0$ que não satisfaça as condições necessárias de 1^a ordem.

4. Prove que se $J_h(x_*) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto m (onde $m < n$), então $\mathcal{N}(J_h(x_*)) = T(x_*)$. Dica: use o Teorema da Função Implícita para provar a existência de uma curva factível da forma $x(t) = x_* + tv + J_h(x_*)^T u(t)$.

5. Mostre que se $h(x) = Ax - b$, a condição de independência linear não é necessária para provar as condições necessárias de primeira ordem. Podemos dizer algo quanto a unicidade dos multiplicadores de Lagrange?

6. Provar que x_* é minimizador local de f sujeita a $h(x) = 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tal que
$$\lambda_0 \nabla f(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x_*) = 0.$$

7. Considere em $\mathbb{R}^2$ a região definida pelas desigualdades: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0$. Mostre que $(1, 0)$ é viável, mas não é regular.

8. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + 2x_2^2 \geq 1. \end{array}$$
Encontre todos os pontos KKT para o problema. Determine quais são minimizadores e quais são maximizadores.

9. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeita a $h_1(x) \leq 0$ e $h_2(x) \leq 0$. Seja $\bar{x}$ um minimizador local regular deste problema. Dê exemplos onde: (a) $h_1(\bar{x}) = h_2(\bar{x}) = 0$, (b) $h_1(\bar{x}) < 0, h_2(\bar{x}) = 0$, (c) $h_1(\bar{x}) < 0, h_2(\bar{x}) < 0$, (d) $h_1(\bar{x}) = h_2(\bar{x}) = 0$ e um dos multiplicadores é zero.

10. Resolva o problema abaixo:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 \\ \text{s.a} & x_2 - x_1^3 \leq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

Por que a solução não satisfaz as condições de Kuhn-Tucker ?

11. Seja x_* minimizador local de f em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $x(t)$ uma curva em Ω de classe C^1 *partindo de* x_*, i.e., $x : [0, \epsilon] \to \Omega$ tal que $\epsilon > 0$, $x(0) = x_*$. Mostre que $\nabla f(x_*)^\top x'(0) \geq 0$.

12. Seja $x(t)$ uma curva factível em Ω de classe $\mathcal{C}^k$ *partindo de* $x_* \in \Omega$. Qual a condição necessária de segunda ordem baseada em curvas? Qual seria a condição necessária de ordem k baseada em curvas ?

13. Sejam $f, g, p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1$ não lineares, p e q lineares e considere o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) \leq 0,\ p(x) \leq 0,\ q(x) \leq 0\}$. Desenhar o gradiente de f e o conjunto Ω nas seguintes situações:

a) x_* é um minimizador local de f em Ω tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ e um dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições lineares é zero.

b) x_* é ponto regular tal que $g(x_*) < 0$ e $p(x_*) = q(x_*) = 0$ mas não é um minimizador local de f em Ω.

c) x_* é um minimizador local de f em Ω tal que $g(x_*) = p(x_*) = 0$, $q(x_*) < 0$ mas não é um ponto reguar de Ω.

14. Uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ é dita *tangente* em $x_* \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) = 0,\ g(x) \leq 0\}$, se existe $\{x_k\} \subset \Omega$ tal que $x_k \to x_*$ e $\dfrac{x_k - x_*}{\|x_k - x_*\|} \to \dfrac{d}{\|d\|}$. Mostre que se d é tangente em x_* então $\nabla h_i(x_*)^\top d = 0, \forall i$ e $\nabla g_j(x_*)^\top d \leq 0$ para todo j índice de restrição ativa em x_*.

15. Consider o problema de minimizar uma quadrática em uma bola $B(0, \Delta)$:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2} x^\top B x + c^\top x \\ \text{s.a} & \|x\|_2^2 \leq \Delta^2. \end{array}$$

Quais as condições de otimalidade para este problema? Quando a solução é única?

16. Considere o conjunto viável Ω em $\mathbb{R}^2$ definido por $x_2 \geq 0, x_2 \leq x_1^2$.

a) Determine o conjunto tangente e o núcleo do Jacobiano das restrições ativas em $x_* = (0, 0)$. O ponto x_* é regular ?

b) Se a função objetivo é $f(x) = -x_2$, verifique que as condições KKT são satisfeitas em x_*.

c) Construa uma sequência $\{z_k\}$ de pontos factíveis se aproximando de x_* tal que $f(z_k) < f(x_*)$ para todo k suficientemente grande.