# Lista 8

1. Sejam $\{x_k\}$, $\{\rho_k\}$ sequência geradas por um algoritmo de penalidade externa. Mostre que

$$\begin{aligned} Q(x_k, \rho_k) &\leq Q(x_{k+1}, \rho_{k+1}) \\ P(x_{k+1}) &\leq P(x_k) \\ f(x_k) &\leq f(x_{k+1}), \end{aligned}$$

onde $f(x)$ é a função objetivo, $P(x)$ a função de penalidade e $Q(x, \rho) = f(x) + \rho P(x)$.

2. Dê um exemplo de problema com restrições de igualdade que possua minimizador local, mas tal que a função de penalidade quadrática associada $Q(x, \rho)$ seja ilimitada independente do valor da parâmetro de penalidade.

3. Seja $\{x_k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo de penalidade externa quadrática. Se $\bar{x}$ é um ponto limite desta sequência, mostre que $\bar{x}$ é estacionário para o problema

$$\min_x \quad \|h(x)\|^2.$$

4. Generalize o algoritmo de penalidade externa visto em aula, que usa a função de penalidade $P(x) = \frac{1}{2}\|h(x)\|_2^2$, para tratar problemas com restrições de desigualdade. Seja $\{x_k\}$ uma sequência de soluções aproximadas para os subproblemas, tais que $\|\nabla_x Q(x_k, \rho_k)\| \leq \varepsilon_k$, com $\varepsilon_k \to 0$. Mostre que se $\bar{x}$ é um ponto limite de $\{x_k\}$ e regular, então $\bar{x}$ satisfaz as condições KKT para o problema original.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica, tal que $y^T A y > 0$ para todo $y \in \mathcal{N}(B) \setminus \{0\}$, onde $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \leq n$. Mostre que existe $\bar{\rho} > 0$ finito tal que para todo $\rho > \bar{\rho}$ a matriz $A + \rho B^T B$ é simétrica positiva definida.

6. Verifique que as condições KKT para o problema com restrições de caixa:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \Omega = \{x \,|\, l \leq x \leq u\}, \end{aligned}$$

equivalem a condição

$$x - P_\Omega(x - \nabla f(x)) = 0,$$

onde $P_\Omega$ denota a projeção sobre a caixa $\Omega$.

7. Proponha uma versão do método de Lagrangiano Aumentado para

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = 0, \\ & l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

com resolução aproximada dos subproblemas.

8. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$, tem posto completo e $B$ é simétrica e tal que $d^T B d > 0$ para todo $d \in \mathcal{N}(A) \setminus \{0\}$, então
$$\begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$
é não-singular.

9. Mostre que se $(x_*, \lambda_*)$ cumprem as condições KKT para o problema de minimizar $f(x)$ sujeita a $Ax = b$, onde $f(x)$ é uma quadrática estritamente convexa, então $(x_*, \lambda_*)$ é ponto sela da função Lagrangiana $\ell(x, \lambda)$, isto é
$$\ell(x_*, \lambda) \leq \ell(x_*, \lambda_*) \leq \ell(x, \lambda_*), \quad \forall (x, \lambda).$$

10. Mostre que o sistema normal $A^T A x = A^T b$ tem sempre solução, mesmo quando $Ax = b$ é inconsistente.

11. Mostre que se $J_h(x_k)d = -h(x_k)$ admite solução, então $J_h(x_k)(d - d_N) = 0$ equivale a tal restrição, onde $d_N$ é solução de $\min\limits_d \|J_h(x_k)d + h(x_k)\|_2^2$.

12. Considere o problema
$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & -x_1 - 0.5x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{array}$$
Escreva uma aproximação quadrática para tal problema em torno de $(1 + \varepsilon, 0)$, $\varepsilon > 0$, usando $B_k = \nabla f^2(x_k)$. Mostre que tal subproblema é ilimitado.

13. Mostre que o problema:
$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & \nabla \ell(x_k, \lambda_k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{s.a} & J_h(x_k)d + h(x_k) = 0, \end{array}$$
é equivalente ao subproblema de programação quadrática sequencial para minimizar $f(x)$, sujeito a $h(x) = 0$.

14. Se no subproblema do exercício anterior, $J_h(x_k)$ tem posto completo e $B_k$ é definida positiva para todo $0 \neq d \in \mathcal{N}(J_h(x_k))$, mostre que tal subproblema tem solução.

15. Considere o problema:
$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & x_1 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{array}$$
e considere o método de PQS puro aplicado a tal problema com a escolha $B_k = I$, para todo $k$, com $x_0 = (2, 0)$. Mostre que $x_k \to \bar{x} = (1, 0)$, e que a função de mérito $\Phi_1(x; \rho)$ decresce a cada iteração. O ponto $\bar{x}$ é minimizador local para o problema original?

16. Interpretando o método de PQS puro como a aplicação do método de Newton (para sistemas não-lineares) às condições KKT do problema de minimização com restrições de igualdade, mostre que se $x_0$ está suficientemente próximo de $x_*$ minimizador local regular que satisfaz as condições suficientes de segunda ordem, então os iterados $(x_k, \lambda_k)$ estão bem-definidos e $(x_k, \lambda_k) \to (x_*, \lambda_*)$ quadraticamente.