Álgebra linear

- Espaço dual

$\mathcal{L}(V,W)$: conjunto de todas as transformações lineares $T: V \to W$. (V e W espaços vetoriais reais)

OBS.: $\mathcal{L}(V,W)$ é um espaço vetorial.

Suponha $\dim V = n$, $\dim W = m$.

→ $\mathcal{L}(V,W)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Por sua vez, as transf. lineares $f: V \to \mathbb{R}$ são chamadas "funcionais lineares".

- $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ é chamado espaço dual de V e denotado por V^*.

Perceba que, se $\dim V = n$, então V^* é isomorfo a $\mathbb{R}^{1\times n}$, que por sua vez, é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
Logo, $\dim V^* = n$.

Dada uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ p/ V, existe uma base dual $\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subset V^*$ tal que

$$\forall v \in V, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$v_i^*(v) = \alpha_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Além disso, se V é munido de produto interno, pode-se definir a transf. linear:

$$\xi: V \to V^*$$
$$v \mapsto \xi(v) = v^* \in V^*$$

tal que $v^*(w) = \langle w, v\rangle$, $\forall w \in V$.

Proposição: ξ é um isomorfismo

Dem. (i) ξ é linear:

- $\xi(v+u)(w) = (u+v)^*(w) = \langle u+v, w\rangle$
$= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
$= u^*(w) + v^*(w) = (\xi(v)+\xi(u))(w)$
i.e., $(u+v)^* = u^* + v^*$.
- $(\alpha v)^* = \alpha v^*$.

(ii) ξ é injetiva.
Seja $v \in V$ tal que $\underbrace{\xi(v)}_{v^*} = 0$.

Então p/ $w \in V$

$$0 = 0(w) = v^*(w) = \langle w, v\rangle, \quad \forall w \in V$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow N(\xi) = \{0_V\}$$

$\therefore \xi$ é injetiva.

(iii) ξ é sobrejetiva: como $\xi: V \to V^*$ e $\dim V = \dim V^*$, e ξ é injetiva, então ξ também é sobrejetiva. ⊠

Da proposição acima, temos que existe $\xi^{-1}: V^* \to V$ tal que se $f: V \to \mathbb{R}$, então $\exists!\, v_f \in V$ tal que $v_f = \xi^{-1}(f)$.

Daí $f(w) = \langle v_f, w\rangle$, $\forall w \in V$.

Teorema (representação de Riesz): ($\dim V < +\infty$)
Em espaço vetorial V munido de produto interno, todo funcional linear ($f: V \to \mathbb{R}$) pode ser representado pelo produto interno com um vetor (único) v_f.

- Adjunta de uma transf. linear

Def.: Seja $T: V \to W$ transf. linear entre espaços vet. com $\langle \cdot,\cdot\rangle$.
A adjunta de T é a transf. linear $T^*: W \to V$ tal que

(2) $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$, $\forall v \in V, w \in W$.

Como $f(v) := \langle Tv, w\rangle$, com w fixo, é um funcional linear, o Teorema de Rep. Riesz nos diz T^*w existe e é único.

Exercício: Mostre que T^* é linear.

Proposição 2. Sejam $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{B_v}$ base ortonormal p/ V
$\underbrace{\{w_1, \dots, w_m\}}_{B_w}$ " " p/ W.

Se A é a matriz de T em relação à base B_v, então $\underset{B}{A^T}$ é a matriz de T^* em relação à base B_w.

Dem.:
$$Tv_j = \sum_{r=1}^{m} a_{rj} w_r, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$
e
$$T^*w_i = \sum_{r=1}^{n} b_{ri} v_r, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II})$$

Como as bases são ortonormais.

$$b_{ji} = \langle v_j, T^*w_i\rangle = \langle Tv_j, w_i\rangle = a_{ij}, \quad \forall i,j$$

Portanto $B^T = A$ ou $B = A^T$. ⊠

Propriedades

Operadores	Matrizes
$I^* = I$	$I^T = I$
$(A+B)^* = A^* + B^*$	$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(\alpha A)^* = \alpha A^*$	$(\alpha A)^T = \alpha A^T$
$(BA)^* = A^* B^*$	$(BA)^T = A^T B^T$
$(A^*)^* = A$	$(A^T)^T = A$
$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema Fundamental da Álgebra linear

Seja $T: V \to W$ transf. linear entre esp. vetoriais V e W de dimensão finita, munidos de produto interno.
Então

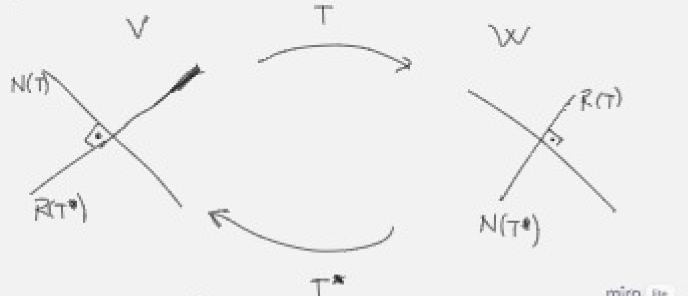
$$R(T)^\perp = N(T^*)$$
$$R(T^*)^\perp = N(T).$$

Dem. $v \in N(T^*)$

$$\langle v, \underbrace{Tw}_{R(T)}\rangle = \langle \underbrace{T^*v}_{=0}, w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0, \quad \forall Tw \in R(T).$$

$$\Rightarrow N(T^*) \perp R(T).$$

A outra identidade vem desta identidade que provamos + o fato de $(T^*)^* = T$ e $(X^\perp)^\perp = X$. ⊠



$V = N(T) \oplus R(T^*)$ $\qquad$ $W = N(T^*) \oplus R(T)$