Lista 0

1. É possível que um sistema linear tenha exatamente duas soluções? Por quê? Se (x, y, z) e (u, v, w) são duas soluções, qual é a outra? Se 25 planos se cruzam em dois pontos, onde mais eles se cruzam?

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) $\det(A) = 0$
(ii) $\dim \mathcal{N}(A) \geq 1$
(iii) $Ax = 0$ possui infinitas soluções

3. Prove que se $\det(A) = \pm 1$ e todas as entradas de A são inteiros, então todas as entradas de A^{-1} são inteiros.

4. Mostre que o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas é um espaço vetorial.

5. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que o núcleo e a imagem de T são subespaços vetoriais de V e W respectivamente.

6. Seja $\mathbb{R}^{n\times n}$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ de entradas reais. Considere V_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores e V_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores de ordem n. Mostre que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_1 + V_2$, mas não é verdade que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$. Prove que, se V_1 é conjunto das matrizes simétricas e V_2 é o conjunto das matrizes anti-simétricas, então $\mathbb{R}^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

7. Seja $V = V_1 \oplus V_2$. Se B_1 é base de V_1 e B_2 é base de V_2, prove que $B_1 \cup B_2$ é base de V.

8. Suponha que as colunas de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Mostre que $Ax = 0$ admite apenas a solução trivial. Explique porque $Ax = b$ tem solução para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

9. Quantas soluções tem o sistema linear $Ax = b$ se b está no espaço coluna de A e as colunas de A são linearmente dependentes (L.D.)?

10. Por que qualquer conjunto finito de vetores que contém o vetor nulo é L.D. ?

11. Mostre que se U e V são subespaços vetorias de $\mathbb{R}^n$ e $U \cap V = \{0\}$, então
$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$

12. Seja A uma matriz $m \times n$ com $m > n$. Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e suponha que $N(A) = \{0\}$.
a) O que pode-se afirmar sobre os vetores coluna de A? Eles são linearmente independentes (L.I.)? Eles cobrem $\mathbb{R}^m$? Explique.
b) Quantas soluções terá o sistema $Ax = b$?

13. Mostre que o sistema linear $Ax = b$ é consistente se, e somente se, o posto de $(A|b)$ é igual ao posto de A.

14. Sejam A e B matrizes $m \times n$. Prove que $\text{posto}(A + B) \leq \text{posto}(A) + \text{posto}(B)$.

15. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
a) Uma transformação linear $T : V \to W$ é sobrejetiva se, e somente se, $\dim \mathcal{N}(T) = \dim V - \dim W$.
b) Dada a transformação linear $A : V \to W$, para todo b fixado em W, o conjunto $G = \{x \in V : Ax = b\}$ é um subespaço vetorial de V.
c) Para todo operador linear $T : V \to V$, tem-se que $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T)$.
d) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão pelo menos 3.

16. Mostre que se A é similar a B e B é similar a C, então A é similar a C.

17. Suponha que $A = Q\Lambda Q^{-1}$, onde Λ é uma matriz diagonal com elementos diagonais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a) Mostre que $Aq_i = \lambda_i \, q_i$, onde q_i é a i-ésima coluna de Q.
b) Mostre que se $x = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_n q_n$, então

$$A^k x = \alpha_1 \lambda_1^k q_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k q_n.$$

c) Suponha que $|\lambda_i| < 1$, para todo i. O que acontece com $A^k x$ quando $k \to \infty$?

18. Sejam A e B matrizes similares. Mostre que:
a) $\det(A) = \det(B)$
b) A^T e B^T são similares
c) A^k e B^k são similares para todo inteiro positivo k

19. O traço de uma matriz $n \times n$, A, é a soma dos elementos da diagonal principal de A:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Mostre que (a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$; (b) se A é similar a B então $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

20. Se $P, Q : V \to V$ são projeções e $PQ = QP$, prove que PQ é uma projeção cujo núcleo é $\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ e cuja imagem é $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$.

21. Seja $P : V \to V$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) Se $V = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P)$ então P é uma projeção.
b) Se $V = \mathcal{N}(P) + \mathcal{R}(P)$ então P é uma projeção.
c) Se P é uma projeção, então $I - P$ também é.
d) Se P é uma projeção então $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ e $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.

22. Se o espaço vetorial V tem dimensão finita, prove que para todo subespaço $X \subset V$ existe um subespaço $Y \subset V$ tal que $V = X \oplus Y$.

23. Prove que todo espaço vetorial de dimensão finita é soma direta de subespaços de dimensão um.

24. Se $AB = 0$, o espaço coluna de B está contido no espaço coluna de A?

25. Se $Ax = b$ possui pelo menos uma solução, para qualquer b, mostre que $y = 0$ é a única solução de $A^T y = 0$.