Lista 1

1. Mostre que $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.

2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|x - y\|_2 = \|x + y\|_2$. Quanto vale $x^T y$?

3. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

4. Usando a identidade do paralelogramo, mostre que a única norma induzida por produto interno em $\mathbb{R}^n$ é a norma-2. (Dica: tome uma norma-p arbitrária e teste a identidade para dois vetores canônicos.)

5. Para um espaço vetorial real, onde $\|.\| = \sqrt{\langle ., . \rangle}$, mostre que
$$\langle x, y \rangle \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}.$$

6. Encontre dois vetores unitários que são ortogonais a $u = (3, -2)$.

7. Considere o conjunto de vetores
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Usando o produto interno padrão em $\mathbb{R}^4$, verifique que estes vetores são mutuamente ortogonais.
(b) Encontre um vetor não-nulo u_4 tal que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ seja um conjunto de vetores mutuamente ortogonais.
(c) Converta tal conjunto em uma base ortonormal para $\mathbb{R}^4$.

8. Determine o ângulo entre $v_1 = (2, -1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 2, 0)$.

9. Dada uma base ortonormal B para um espaço vetorial V, explique porque a expansão de Fourier de $x \in V$ é determinada unicamente por B.

10. Explique porque as colunas de uma matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ são uma base ortonormal para $\mathbb{C}^n$ se e somente se $U^H = U^{-1}$.

11. Se V é um espaço vetorial real, prove que $-1 \leq \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$, para quaisquer $x, y \in V \setminus \{0\}$.

12. Construa um exemplo em $\mathbb{R}^n$, usando o produto interno padrão, para mostrar que dois vetores x e y podem ter um ângulo que está próximo de $\pi/2$ sem que $x^T y$ esteja próximo de zero.

13. Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} |\langle u_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$
e que a igualdade é verdadeira somente se $x \in \operatorname{span}(\{u_1, \ldots, u_k\})$.