Lista 2

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $x^T Ay = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se $A = 0$. Esta afirmação continua válida se $y = x$? Prove ou dê um contra-exemplo.

2. Considere $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^T\}$. Prove que $P(A) = (A + A^T)/2$ define um projetor ortogonal sobre W, com respeito ao produto interno do traço $\langle A, B\rangle = \text{tr}(AB^T)$. Encontre uma expressão para a projeção de uma matriz A sobre $W^\perp$.

3. Seja P um projetor ortogonal. Mostre que $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.

4. Usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir do conjunto de vetores linearmente independentes:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Matrizes com a propriedade $A^T A = AA^T$ são chamadas de matrizes normais. Note que matrizes simétricas e anti-simétricas são exemplos de matrizes normais. Seja A uma matriz normal. Mostre que $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$.

6. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para cada um dos quatro subespaços fundamentais de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Determine a fatoração QR de A e utilize os fatores para determinar a solução de quadrados mínimos para o sistema linear $Ax = b$.

8. Encontre a reta $y(x) = \alpha x + \beta$ que "melhor ajuste" os pontos: (0,0), (1,1), (2,2.2) e (3,2.9).

9. Mostre que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então $\|Qx\|_2 = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

10. Mostre que as colunas de $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são ortonormais se, e somente se, as linhas de Q são ortonormais.

11. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_1 \neq 0$, encontre um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ tal que o refletor elementar $R = I - 2uu^T$ satisfaça $Rx \in \text{span}\{e_1\}$.

12. Prove que se A é uma matriz anti-simétrica, então
$$U = (I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$$
é uma matriz ortogonal. (Primeiro mostre que $(I + A)$ é não singular.)

13. Sejam $u = (-2, 1, 3, -1)$ e $v = (1, 4, 0, -1)$. Determine:
   (a) a projeção ortogonal de u em $\operatorname{span}(v)$;
   (b) a projeção de v em $\operatorname{span}(u)$;
   (c) a projeção de u sobre $v^\perp$;
   (d) a projeção de v sobre $u^\perp$.

14. Considere o projetor elementar $Q = I - uu^T$. Mostre que:
   (a) Q é singular.
   (b) Se $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então o posto de Q é $n - 1$.