Lista 3

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz invertível. Qual é a relação entre os autopares de A e A^{-1}?

2. Sejam (λ_1, v_1) e (λ_2, v_2) autopares de A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são linearmente independentes.

3. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita *simétrica positiva definida* quando $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Prove que se A é simétrica positiva definida então todos seus autovalores são positivos.

4. Mostre que os autovalores de $A^T A$ e AA^T são todos não-negativos.

5. Mostre que traço de A é igual a soma de seus autovalores.

6. Prove que os autovalores de uma matriz anti-Hermitiana são imaginários puros.

7. Dizemos que duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são *similares* quando existe uma matriz não-singular P tal que $B = PAP^{-1}$. Mostre que se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes similares, então A, B possuem os mesmos autovalores. O que pode-se dizer dos autovetores ?

8. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é similar a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $\text{posto}(A) = \text{posto}(B)$.

9. Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA$, prove que A e B possuem um autovetor em comum.

10. Mostre que se $A = A^H$, então todos seus autovalores são reais.

11. Sejam (λ_1, v_1) e (λ_2, v_2) autopares de uma matriz Hermitiana A, tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que v_1 e v_2 são ortogonais.

12. Prove ou dê um contra-exemplo:

    a) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda + \mu \in \sigma(A + B)$.
    b) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ e $\mu \in \sigma(B)$ então $\lambda\mu \in \sigma(AB)$.
    c) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
    d) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui todos os autovalores iguais, então $A = \alpha I$.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se,
$$\mathbb{R}^n = N(A - \lambda_1 I) \oplus N(A - \lambda_2 I) \oplus \ldots \oplus N(A - \lambda_s I).$$

14. Sejam $c, d \in \mathbb{R}^n$ não nulos. Prove que a matriz $A = cd^T$ é diagonalizável se, e somente se, $d^T c \neq 0$.

15. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Mostre que
$$\lambda_n \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1,$$
onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ são os autovalores de A.

16. Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal tem autovalores reais se e somente se A é simétrica.

17. Mostre que uma matriz triangular T é normal se e somente se T é diagonal.

18. Se A é uma matriz normal, mostre que (λ, x) é autopar de A se e somente se $(\bar{\lambda}, x)$ é autopar de A^H.

19. Mostre que A é simétrica, positiva-definida se e somente se $A = B^T B$ para alguma B não-singular.

20. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita nilpotente de ordem $k \in \mathbb{Z}_+$ se $A^k = 0$. Se $A^{k-1}u \neq 0$, mostre que o conjunto $\{u, Au, A^2u, \ldots, A^{k-2}u, A^{k-1}u\}$ é linearmente independente.