Lista 4

1. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que o conjunto de autovetores associado a um autovalor λ, união com o vetor nulo, é um subespaço vetorial de V.

2. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$
Encontre uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ são diagonais.

3. Uma matriz A é dita idempotente se $A^2 = A$. Mostre que se λ é autovalor de A idempotente, então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Sejam v um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$ e $A = vv^T$. Mostre que A é idempotente e que v é um autovetor de A. A é diagonalizável?

4. Seja A uma matriz quadrada e $B = A + \alpha I$. Qual a relação entre os autovalores de A e B?

5. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A e A^T têm o mesmo polinômio característico. Podemos afirmar que elas têm os mesmo autovetores?

6. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora. A recíproca é verdadeira?

7. Seja A uma matriz diagonalizável com autovalores 1 ou -1. Determine A^{-1}.

8. Mostre que qualquer matriz da forma
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
não é diagonalizável.

9. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Assuma que V é de dimensão finita e que $T^2 = T$. Mostre que T é diagonalizável.

10. Sejam x e y vetores não nulos do $\mathbb{R}^n$. Sendo $A = xy^T$, mostre que:

    a) Zero é um autovalor de A com multiplicade geométrica ao menos $n - 1$.
    b) O outro autovalor é $\lambda_n = x^T y$, sendo x o autovetor associado.
    c) Se $\lambda_n \neq 0$ então A é diagonalizável.

11. Sejam P e Q matrizes unitárias de ordem n. Mostre que:

    a) PQ também é unitária.
    b) Se λ é autovalor de Q, então $|\lambda| = 1$.
    c) $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ e $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$.

12. Mostre que toda matriz unitária é normal.

13. Seja B uma matriz $m \times n$ de posto n. Mostre que $A = B^T B$ é definida positiva.

14. Mostre que se A é não singular e simétrica, então A^2 é definida positiva.

15. Mostre que os elementos diagonais de uma matriz Hermitiana são reais.
16. Se A e B são Hermitianas, mostre que AB é Hermitiana se e somente se $AB = BA$.
17. Dadas duas matrizes quadradas A e B diagonalizáveis, mostre que $AB = BA$ se e somente se A e B possuem o mesmo conjunto completo de autovetores.