Lista 5

1. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita nilpotente de ordem $k \in \mathbb{Z}_+$ se $A^k = 0$. Se $A^{k-1}u \neq 0$, mostre que o conjunto $\{u, Au, A^2u, \dots, A^{k-2}u, A^{k-1}u\}$ é linearmente independente.

2. Considere a matriz nilpotente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   i) Encontre os autovetores de A. ii) A seguir, para cada autovetor L.I. x_i, encontre um autovetor generalizado associado v_i: $A^j v_i = x_i$, para o maior inteiro j possível. iii) Usando os autovetores generalizados construa uma matriz não singular Q, usando as cadeias de Jordan de cada v_i, tal que $QAQ^{-1} = J$, em que J é formada por blocos de Jordan.

3. Coloque a seguinte matriz nilpotente em sua forma de Jordan.

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Construa uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP = J$, com J na forma de Jordan.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Usando a forma canônica de Jordan mostre que $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ se, e somente se, $\rho(A) < 1$ ($\rho(A)$ denota o raio espectral de A, i.e., o módulo do autovalor de maior magnitude).

6. Mostre que se $\rho(A) < 1$, então $I - A$ é não-singular.

7. Usando o Teorema de Jordan, demonstre o Teorema de Cayley-Hamilton.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine a SVD de A na forma $A = U\Sigma V^T$. A SVD não é única, então encontre aquela que possui o menor número de sinais negativos em U e V.
   b) Liste os valores singulares, e vetores singulares a esquerda e a direita. Ilustre a atuação de A sobre os vetores da bola unitária (norma-2) em $\mathbb{R}^2$.
   c) Encontre A^{-1} via SVD.
   d) Encontre os autovalores de A.
   e) Verifique que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ e $|\det(A)| = \sigma_1\sigma_2$.
   f) Qual a área da elipse na qual A mapeia a bola unitária em $\mathbb{R}^2$?

9. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Usando a decomposição em valores singulares de A, determine a decomposição espectral das matrizes A^TA e AA^T. Como os autovalores destas matrizes se relacionam com os valores singulares de A ?

10. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singular, e $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_2 = 1\}$. Mostre que $A(\mathcal{S})$ define um elipsóide em $\mathbb{R}^n$ (Exiba a equação que define tal elipsóide). Qual o tamanho dos semi-eixos deste elipsóide ?

11. Se $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$, mostre que $\{P_i\}_{i=1}^r$, onde $P_i = u_i v_i^T$, é um conjunto ortonormal com respeito ao produto interno do traço.

12. Mostre que para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i$.

13. Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possua SVD: $A = U\Sigma V^T$. Encontre uma decomposição em autovalores da matriz Hermitiana $2n \times 2n$:
$$\begin{bmatrix} 0 & A^H \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que os valores singulares de $\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}$ são da forma $\sqrt{1+\sigma_i^2}$, onde σ_i é um valor singular de A.

15. Explique porque uma matriz não singular $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pode ser decomposta em $A = RU$, onde R é Hermitiana, positiva definida, e U unitária. Esta é conhecida como *decomposição polar* de A, e é uma generalização da conhecida identidade $z = re^{i\theta}$ para números complexos.

16. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é tal que $A^T = -A$, então $I - A$ é não singular e a matriz $Q = (I-A)^{-1}(I+A)$ é ortogonal. A matriz Q é conhecida como *transformada de Cayley* de A.

17. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A *pseudo-inversa de Moore-Penrose* de A é a matriz $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que:

    (a) $A^+A = (A^+A)^T$
    (b) $AA^+ = (AA^+)^T$
    (c) $AA^+A = A$
    (d) $A^+AA^+ = A^+$

    Mostre que AA^+, $I - AA^+$, A^+A, $I - A^+A$ são projetores ortogonais. Sobre quais subespaços?

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \geq n$ e posto completo. Usando as decomposições QR e SVD, mostre que
$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = R^{-1}Q^T = V\Sigma^+U^T.$$

19. Mostre que qualquer solução x do sistema linear $A^TAx = A^Tb$ pode ser escrita como
$$x = A^+b + (I - A^+A)u,$$
em que A^+ denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de A.

20. Mostre que $x^+ = A^+b$ é solução de
$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \|x\|_2^2 \\ \text{sujeito a} \quad & A^TAx = A^Tb. \end{aligned}$$