Lista 0

1. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$? Qual é a matriz A que descreve esta transformação em relação a base canônica?

2. Sejam u, v e w vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o conjunto $\{\lambda u + v, u + \lambda v + w, \lambda u + v + \lambda w\}$ é linearmente independente.

3. Considere o conjunto $E = \{v \in V \,|\, T(v) = \lambda v\}$, onde $T : V \to V$ é uma transformação linear e λ um escalar. Mostre que E é um subespaço de V. Mostre que para todo $w \in E$, $T(w) \in E$.

4. Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$ e $T \subset \mathbb{R}^4$ tal que $S + T = \mathbb{R}^4$. Quais das afirmações abaixo estão corretas?

   I. As dimensões de S e T são 3 e 1, respectivamente.

   II. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 2.

   III. A dimensão de $S \cap T$ pode ser 1.

5. Sejam u, v vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Dado $\alpha \neq 0$, mostre que $\{v, v + \alpha u\}$ é uma base para $span\{v, v + u, v + 2u, v + 3u, \dots\}$.

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^n = 0$ e $A^{n-1}v \neq 0$. Mostre que $\{v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v\}$ é um conjunto L.I.

7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Provar que se $\{u_1, \dots, u_p\}$ é uma base para o núcleo de A e $\{Av_1, \dots, Av_q\}$ é uma base para a imagem de A, então $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^n$.

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com dois autovalores reais distintos: λ e μ. Considere os conjuntos $L = \{Ax - \lambda x \,|\, x \in \mathbb{R}^2\}$ e $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ax = \mu x\}$.

   a) Mostre que L e U são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.

   b) Mostre que $L \subset U$.

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno $\langle ., . \rangle$, com a norma induzida pelo produto interno $\| * \| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$. Mostre que

   $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in V,$$

   e que a igualdade é verificada se e somente se $y = \alpha x$ para $\alpha = \langle x, y \rangle / \|x\|^2$. Usando a desigualdade acima, prove a desigualdade triangular.

10. Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ vetores ortonormais de $\mathbb{R}^n$. Considere a seguinte matriz

    $$P = v_1 v_1^T + v_2 v_2^T + v_3 v_3^T.$$

    a) Encontre o núcleo e a imagem de P.

    b) Qual o posto de P ?

11. Considere o $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, e $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$. Considere as transformações:

$$P(v) = \frac{u^T v}{u^T u} u \quad \text{e} \quad Q(v) = v - 2P(v).$$

   a) Mostre que P e Q são operadores lineares sobre $\mathbb{R}^n$.

   b) Mostre que $P(w) = w$, com $w = \alpha u, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

   c) Mostre que $P(w) = 0$ quando $u^T w = 0$.

   d) Mostre que $Q(w) = -w$, com $w = \alpha u, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

   e) Considere $n = 2$ e forneça uma interpretação geométrica para os operadores P e Q.

12. Se V e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ tais que $\dim(V) = 1$, $\dim(W) = 2$ e V não está contido em W, mostre que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

13. Seja $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que

   a) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

   b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

   c) A é singular se, e somente se, $\det(A) = 0$.

   d) A é não-singular se, e somente se, $N(A) = \{0\}$.

14. Mostre que o determinante de uma matriz triangular superior(inferior) é o produto dos elementos de sua diagonal principal.

15. Seja Q uma matriz quadrada de ordem n. Sabendo que $Q^3 + 2Q^2 = 0$, calcule o $\det(Q)$.

16. Mostre que toda matriz quadrada pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e outra anti-simétrica.

17. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com posto$(A) = k$. Considere $A = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_n]$ (por colunas) e sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$ as colunas linearmente independentes de A. Como deve ser o vetor b para que o sistema $Ax = b$ tenha solução ? Escreva a solução geral do sistema $Ax = b$.

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ e posto$(A) = m$. Mostre que AA^T é não-singular.

19. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que:
   a) $N(A)$ e $Im(A^T)$ são subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^n$.
   b) $N(A) \oplus Im(A^T) = \mathbb{R}^n$.
   c) $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^T)) = n - \dim(N(A)) = $ posto(A).

20. Sendo A e B matrizes invertíveis, calcule a matriz X tal que:
   a) $AX = B$ b) $AXB = I$ c) $ABX = B^T$ d) $ABA^{-1}X = A^T$.

21. Mostre que o posto linha é igual ao posto coluna.

22. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $x^T Ax \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(I - A)$ é não-singular.

23. Mostre que se $A = A^H$, então todos seus autovalores são reais. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.