Lista 1

1. Prove as seguintes desigualdades:

   a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

   b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

   c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

2. Sejam $\|\cdot\|$ uma norma vetorial em $\mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que se posto$(A) = n$, então, $\|x\|_A = \|Ax\|$ é uma norma vetorial em $\mathbb{R}^n$.

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ e $\|A\|_\infty$.

4. Prove as seguintes desigualdades, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

   a) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$

   b) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

   c) $\max_{ij} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\ \max_{ij} |a_{ij}|$

5. Mostre que se $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ e $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então,

$$\left\| E\left(I - \frac{ss^T}{s^Ts}\right)\right\|_F^2 = \|E\|_F^2 - \frac{\|Es\|_2^2}{s^Ts}.$$

6. Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $A = vw^T$.

   a) Qual é o posto de A? Justifique.

   b) Mostre que $\|A\|_2 = \|v\|_2\|w\|_2$.

7. Explique por que $\|I\| = 1$ para toda norma matricial induzida. Quanto vale $\|I\|_F$?

8. Sejam A e B matrizes tais que o produto AB esteja definido e x um vetor. Prove as seguintes propriedades para uma norma matricial induzida:

   a) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

   b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

9. Estabeleça as seguintes propriedades da norma-2 matricial:

   a) $\|A\|_2 = \max_{\substack{\|x\|_2=1,\\ \|y\|_2=1}} |y^TAx|$

b) Se A, B são matrizes reais, então $\left\| \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\|_2 = \max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}$.

10. Prove a desigualdade triangular reversa:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

11. Usando a norma matricial induzida, mostre que se A é não-singular, então

$$\|A\| = \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\|} \quad \text{ou de forma equivalente} \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

12. Prove a desigualdade de Hölder para $p = 2$.

13. Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$ e defina $\phi(\alpha) = \|x - \alpha y\|_2$. Mostre que o mínimo de ϕ é atingido quando $\alpha = \dfrac{x^T y}{y^T y}$.

14. Mostre que $\bar{A} = \dfrac{A + A^T}{2}$ é a matriz simétrica mais próxima de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na norma de Frobenius.

15. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

16. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)}$.

17. Mostre que a norma de Frobenius é consistente.

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz ortogonal. Mostre que:
(a) $\|Q\|_2 = 1$ (b) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ (c) $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ (d) $\|QA\|_F = \|A\|_F$

19. Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|P\|_\infty < 1$. Prove que $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^n P^i = (I + P)^{-1}$.

20. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular e $E = \alpha A$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam ainda $x, y, b \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = b$ e $(A + E)y = b$. Mostre que $\|x - y\| = \frac{|\alpha|}{|1+\alpha|} \|x\|$. Para que valores de α é possível garantir que $\|y\| \leq 1.5\|x\|$?

21. Mostre que se A é não singular e

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{\kappa(A)},$$

então $A + \delta A$ é não singular.

22. Mostre que para uma dada norma, $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ e que $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$ para $\alpha \neq 0$.

23. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica com autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ então $\kappa_2(A) = \lambda_1 / \lambda_n$.

24. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com o i-ésimo autovalor denotado por λ_i. $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ é chamado de raio espectral de A. Mostre que $\rho(A) \leq \|A\|$.

25. Seja $A(x + \delta x) = (b + \delta b)$ um sistema linear perturbado. Mostre que $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \geq \dfrac{1}{\kappa(A)} \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.