Lista 2

1. Mostre que se $\|.\|$ é uma norma matricial induzida então $\|I\| = 1$. A norma de Frobenius é uma norma induzida?

2. Mostre que se A é não-singular e $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, então o sistema perturbado

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

tem solução única e

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

3. Seja A uma matriz não-singular. Exiba uma matriz δA, tal que

$$\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{1}{\kappa_2(A)},$$

e $A + \delta A$ é singular.

4. Seja A uma matriz não singualar de ordem n. Se C e D são matrizes $n \times k$, $k < n$, tais que $(I + D^T A^{-1} C)^{-1}$ existe, verifique a fórmula de *Sherman-Morrison-Woodbury*:

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1} C)^{-1} D^T A^{-1}.$$

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Exiba uma matriz elementar $E = I - uv^T$, tal que $\tilde{A} = EA$ é a matriz A cuja j-ésima linha recebeu a soma das linhas i e j de A.

6. Seja $T_k = I - c_k e_k^T$, onde e_k é o k-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$ e $c_k = (0, \ldots, 0, \mu_{k+1}, \ldots \mu_n)^T$.

   (a) Mostre que T_k é não singular e triangular inferior.
   (b) Encontre T_k^{-1} e mostre que esta também é triangular inferior.
   (c) Prove que $L_k = T_1^{-1} T_2^{-1} \ldots T_k^{-1} = I + c_1 e_1^T + \cdots + c_k e_k^T$.

7. Prove que o produto de matrizes triangulares inferiores resulta em uma matriz triangular inferior.

8. Prove que a inversa de uma matriz triangular inferior é também triangular inferior.

9. Encontre os autovalores e autovetores de uma matriz triangular inferior.

10. Se A possui todos os menores principais não nulos, forneça uma expressão para A^{-1} como o produto de matrizes triangulares.

11. Construa um exemplo de matriz não-singular simétrica que não possua fatoração LU. Também construa um exemplo de matriz não-singular simétrica que possui fatoração LU, mas não é definida positiva.

12. Seja A uma matriz simétrica que admite fatoração LU (sem pivoteamento). Mostre que $A = LDL^T$ onde D é uma matriz diagonal.

13. Seja P uma matriz de permutação. Mostre que $P^T = P^{-1}$ e que $\det(P) = \pm 1$.

14. Considere a matriz tridiagonal:

$$T = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Quais as condições para que exista a fatoração LU de T ?
(b) Encontre a decomposição LU de T.
(c) Generalize o resultado anterior para matrizes tridiagonais de ordem n.

15. Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica e todos seus menores principais são positivos então A é definida positiva.

16. Prove que se A é simétrica positiva definida então todos seus autovalores são positivos.

17. Prove que se A é diagonalmente dominante, com elementos positivos na diagonal, então A é definida positiva.

18. Assumindo A não-singular, descreva um procedimento para resolver o sistema matricial $AX = B$, onde A,B,X são matrizes de ordem n.

19. Se A é simétrica positiva definida e C é não singular, mostre que $B = C^T AC$ é também simétrica positiva definida.

20. Se $A = G^T G$, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz generalizada:

$$|x^T Ay|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay).$$

21. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita positiva semidefinida se $x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se A é positiva semidefinida então:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &\leq (a_{ii} + a_{jj})/2, \\ |a_{ij}| &\leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}, \quad \forall i \neq j \\ \max_{i,j} |a_{ij}| &= \max_i a_{ii}, \\ a_{ii} = 0 &\Rightarrow A(i,:) = 0,\ A(:,i) = 0. \end{aligned}$$

22. Seja A uma matriz simétrica positiva semidefinida. Existe fator R tal que $A = R^T R$? R é único?

23. Seja A uma matriz simétrica positiva definida. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

é definida positiva se e somente se A e $C - B^T A^{-1} B$ são definidas positivas.