Lista 6

1. Mostre que $\rho(A) \leq \|A\|$, para qualquer norma matricial consistente.

2. Prove que se existe uma norma matricial tal que $\|A\| < 1$, então $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

3. Mostre que a iteração de Jacobi pode ser escrita na forma $x^{k+1} = x^k - Br^k$, onde $r^k = Ax^k - b$ é o vetor resíduo. Faça o mesmo para Gauss-Seidel.

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalmente dominante por colunas. Mostre que $\|H_{GS}\|_\infty \leq \|H_J\|_\infty$, onde H_{GS} e H_J são as matrizes de iteração de Gauss-Seidel e Jacobi respectivamente.

5. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalmente dominante por linhas então o método de Jacobi converge partindo de qualquer ponto incial x^0. O que acontece com o método de Gauss-Seidel ?

6. Mostrar que se $A = M - N$, M não singular e A singular, então $\rho(M^{-1}N) > 1$. O que acontece com os métodos de splitting neste caso?

7. a) Considere a matriz 2×2: $A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -s & 1 \end{bmatrix}$. Sob que condições sobre esta matriz Gauss-Seidel irá convergir ?

   b) Generalize o resultado para a matriz: $A = \begin{bmatrix} I_n & S \\ -S^T & I_n \end{bmatrix}$, onde $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (Dica: use a SVD de S)

8. A *taxa assintótica de convergência* de um método iterativo é definida por

$$R_\infty(H) = -\log_{10}\rho(H).$$

   Mostre que $1/R_\infty(H)$ é aproximadamente o número de iterações necessárias para reduzir o erro por um fator de $10\times$ (para k suficientemente grande).

9. A matriz de iteração do método de Richardson é dada por $H_\omega = I - \omega A$. Suponha A simétrica definida-positiva e λ_1 e λ_n o maior e menor autovalores de A.

   a) Mostre que os autovalores de H_ω são menores que um.

   b) Prove que o método de Richardson converge se e somente se $\omega < 2/\lambda_1$.

   c) Prove que o valor de ω que minimiza $\rho(H_\omega)$ é $\omega* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

   d) Para A s.d.p., mostre que $\rho(H_{\omega*}) = \dfrac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1}$.

10. Para A é simétrica e definida positiva, qual a relação entre o método de Jacobi para $Ax = b$ e métodos do tipo gradiente para $\min_x \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$?

11. Seja $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, com A simétrica positiva definida. Mostre que o escalar α que minimiza $\psi(\alpha) = \phi(x_k + \alpha d_k)$ é dado por

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T d_k}{d_k^T A d_k}.$$

12. Seja A simétrica positiva definida. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são A-conjugados.

13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica positiva definida e $d_0, d_1, \ldots, d_k$ direções A-conjugadas. Mostre como encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tal que $Q^T AQ$ é diagonal.

14. Sejam A e B matrizes reais simétricas $n \times n$ que comutam: $AB = BA$. Mostre que existe uma matriz Q ortogonal tal que $Q^T AQ$ e $Q^T BQ$ são matrizes diagonais.

15. Mostre que no método de direções conjugadas r_{k+1} é ortogonal a $span\{d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k\}$.

16. Provar que os resíduos $\{r_0, \ldots, r_k\}$ gerados pelo método de gradientes conjugados são mutuamente ortogonais.

17. Prove que o coeficiente β_{k+1} na iteração de gradientes conjugados pode ser escrito como

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle r_{k+1}, r_{k+1}\rangle}{\langle r_k, r_k\rangle}.$$

18. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica e definida positiva. Mostre que se $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ são vetores linearmente independentes, então as direções $\{d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}\}$ definidas por:

$$d_0 = p_0,$$

$$d_{k+1} = p_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{p_{k+1}^T A d_i}{d_i^T A d_i} d_i,$$

são A-conjugadas.

19. Suponha que no exercício anterior $p_k = A^k p_0$. Mostre que d_{k+1} pode ser obtida por uma fórmula de recursão envolvendo somente os termos Ad_k, d_k e d_{k-1}.

20. No item anterior, mostrar que se $p_k = e_k$, k-ésimo vetor canônico, então o método de direções conjugadas equivale a eliminação Gaussiana para resolver $Ax = b$.